Université de Rennes 1
Année 2024/2025

L3—PS
Feuille de TD 12-Corrections

Exercice 1. Une association comprend 12 personnes.
(i) Combien de permanences de cette association composées de 3 personnes peut on former ?
(ii) Combien de bureaux de cette association composés d'un président, d'un secrétaire et d'un trésorier peut on former ?

Solution : (i) Le nombre est égal au nombre de 3-combinaisons d'un ensemble à 12 éléments, c-à-d $\binom{12}{3} = 220$.
(ii) Le nombre est égal au nombre de 3-arrangements d'un ensemble à 12 éléments, c-à-d $A^3_{12} = 3!\binom{12}{3} = 1320$.

Exercice 2. On lance un dé à 6 faces 4 fois de suite, de manière indépendante.
(i) Décrire un espace probabilisé modélisant cette expérience aléatoire.
Solution : L'univers est $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^4$, avec la mesure de probabilité uniforme $\mathbf{P}$ définie sur $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ par $\mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$ pour tout $A \subset \Omega$.
(ii) Quelle est la probabilité que deux nombres distincts apparaissent, chacun deux fois, lors de ces 4 lancers ?
Solution : L'univers est $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^4$, avec la mesure uniforme $\mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$ pour tout $A \subset \Omega$. Soit A l'événement "deux nombres distincts apparaissent, chacun deux fois". Il y a $\binom{6}{2}$ choix possibles pour les deux nombres qui apparaissent dans A; pour chacun de ces choix, il y a $\binom{4}{2}$ choix possibles de leur positions. D'où $\mathbf{P}(A) = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{6^4} = \frac{5}{72}$.

Exercice 3. On dispose de 2 urnes U_1 et U_2 contenant 100 boules en tout. L'urne U_1 contient 40 boules dont 8 sont blanches et 32 noires ; l'urne U_2 contient 60 boules dont 6 sont blanches et 54 noires. On choisit au hasard une urne et on en tire une boule. Soient A_i l'évènement "l'urne choisie est U_i" pour $i = 1, 2$ et A l'événement "la boule est blanche".

(i) Calculer $\mathbf{P}(A|A_1), \mathbf{P}(A|A_2)$ et $\mathbf{P}(A)$.
Solution : On a $\mathbf{P}(A|A_1) = \frac{8}{40} = \frac{2}{10}$ et $\mathbf{P}(A|A_2) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$. De plus, $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = 1/2$. D'où $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|A_1)\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A|A_2)\mathbf{P}(A_2) = \frac{3}{20}$.

(ii) On constate qu'on a tiré une boule blanche. Qu'elle est la probabilité qu'elle provient de l'urne U_2.
Solution La probabilité cherchée est $\mathbf{P}(A_2|A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap A_2)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|A_2)\mathbf{P}(A_2)}{\mathbf{P}(A)} = 1/3$.

Exercice 4. Un livre de 100 pages contient 1000 erreurs, réparties aux hasard selon les pages. On ouvre le livre et on compte le nombre X d'erreurs contenues dans une page.

Identifier la loi de X. Quelle est l'espérance de X? Quelle est sa variance ?
Solution : On peut s'imaginer qu'on a 100 urnes (correspondant aux 100 pages) et 1000 boules (correspondant aux 1000 erreurs). On place alors au hasard chacune des boules, l'une après l'autre, dans une des urnes. On fixe une urne (c-à-d une page). A chaque placement d'une boule, la probabilité que cette urne reçoive cette boule est 1/100. Comme il y a 1000 boules, on a donc affaire à 1000 expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre 1/100 chacune. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n = 1000$ et $p = 1/100$. On a $\mathbf{E}(X) = np = 1000 \times (1/100) = 10$ et $\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 1000 \times (1/100) \times (99/100) = 9.9$.

Exercice 5. On désire évaluer le nombre N de kangourous vivant sur une île. Pour cela, on commence par capturer 800 kangourous que l'on marque et relâche juste après. Après un certain temps, on capture de nouveau 1000 kangourous parmi lesquels on trouve que 250 sont marqués. En déduire un intervalle de confiance pour N au seuil de risque de $\alpha = 5\%$.
Solution : Soit $p = \frac{800}{N}$ la proportion de kangourous marqués. Une estimation de p est donnée par $\widehat{p} = \frac{250}{1000} = 0.25$. Comme $\mathbf{P}(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ pour $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, l'intervalle de confiance pour p au risque de 5% (voir cours) est donné par

$$\left[\widehat{p} - 1.96\frac{1}{2\sqrt{1000}}, \widehat{p} + 1.96\frac{1}{2\sqrt{1000}}\right],$$

c-à-d $[0.25 - 0.03, 0.25 + 0.03] = [0.22, 0.28]$.

Une estimation de N est $\widehat{N} = \frac{800}{\widehat{p}} = 3200$. L'intervalle de confiance pour N au risque de 5% est donné par

$$\left[\frac{800}{0.28}, \frac{800}{0.22}\right] = [2857, 3636].$$

Exercice 6. On considère une urne contenant 5 boules, dont 3 sont blanches et 2 noires. On tire de l'urne successivement deux boules **sans remise**. Soient X_1 (respectivement X_2) la v.a.r égale à 1 si la 1e (respectivement la 2e) boule est blanche et 0 sinon.
(i) Déterminer la loi conjointe de (X_1, X_2) ainsi que la loi de X_1 et la loi de X_2 et présenter le résultat sous forme de tableau.
Solution : On a $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$ et $\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$, et on obtient le tableau suivant

X_2/X_1	1	0	P_{X_2}
1	3/10	3/10	6/10
0	3/10	1/10	4/10
P_{X_1}	6/10	4/10	1

(ii) Calculer $\mathbf{E}(X_1 X_2)$ et la covariance $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

Solution : On a $\mathbf{E}(X_1X_2) = 1 \times \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 3/10$; d'autre part, $\mathbf{E}(X_1) = 1 \times \mathbf{P}(X_1 = 1) = 6/10$ et $\mathbf{E}(X_2) = 1 \times \mathbf{P}(X_2 = 1) = 6/10$. D'où $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbf{E}(X_1X_2) - \mathbf{E}(X_1)\mathbf{E}(X_2) = -3/50$.

Exercice 7. Soit X v.a.r continue de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Déterminer la loi de $Y = f(X)$ pour $f :]-1, 1[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}\log(\frac{1+x}{1-x})$. (Indication : montrer que $f :]-1, 1[\to \mathbf{R}$ est une bijection croissante).
Solution : f est bijective, d'inverse $f^{-1} : \mathbf{R} \to]-1, 1[$ donnée par $f^{-1}(y) = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$; de plus, f est croissante car $f'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1-x}{1+x}\dfrac{2}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{1-x^2} > 0$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Soit $y \in \mathbf{R}$. On a, pour la fonction de répartition F_Y de Y :

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(f(X) \leq y) = \mathbf{P}(X \leq f^{-1}(y)) = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{f^{-1}(y)} dx = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}+1\Big).$$

On obtient la densité g de Y en dérivant F_Y : $g(y) = \dfrac{2e^{2y}}{(e^{2y}+1)^2}$ pour tout $y \in \mathbf{R}$.

Exercice 8. Pour $a > 0$, soit X une variable aléatoire continue de densité f, donnée par $f(x) = axe^{-\frac{x^2}{2}}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.
(i) Déterminer a.
Solution : On a $f(x) \geq 0$ pour tout x et f est continue. De plus, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2/2}dx = [-e^{-\frac{x^2}{2}}]_0^{+\infty} = 1$.
(ii) Soit $Y = -X^2$. Déterminer la densité de Y
Solution : Pour tout $y \in \mathbf{R}$, on a $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(-X^2 \leq y) = \mathbf{P}(X^2 > -y$. Pour $y > 0$, on a donc $F_Y(y) = 0$; pour $y \leq 0$, on a, avec le changement de variable $u = x^2$: $F_Y(y) = \mathbf{P}(X > \sqrt{-y}) = \int_{\sqrt{-y}}^{+\infty} xe^{-x^2/2}dx = \frac{1}{2}\int_{-y}^{+\infty} e^{-u/2}du = -e^{-u/2}|_{-y}^{+\infty} = e^{y/2}$; la densité de Y est donc $\frac{1}{2}e^{y/2}\mathbf{1}_{]-\infty,0]}(y)$.
(iii) Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
Solution : Avec une IPP, on a $\mathbf{E}(X) = \int_0^{+\infty} x^2e^{-x^2/2}dx = [xe^{-x^2/2}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = 0 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{\pi/2}$. De plus, $\mathbf{E}(X^2) = \mathbf{E}(-Y) = 2$, car $-Y \sim \mathcal{E}(1/2)$. D'où $\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 9. Pour $a \in \mathbf{R}$, soit (X, Y) un couple aléatoire de densité f définie par

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = \frac{a}{(1+x+y)^2}\mathbf{1}_{[0,1[}(x)\mathbf{1}_{[0,1[}(y).$$

(i) Déterminer a.

Solution : On doit avoir

$$
\begin{aligned}
1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = a\int_0^1\left(\int_0^1 \frac{1}{(1+x+y)^2}dx\right)dy \\
= a\int_0^1\left[\frac{-1}{(1+x+y)}\right]_{x=0}^{x=1}dy = a\int_0^1(\frac{-1}{2+y}+\frac{1}{1+y})dy \\
= a\left([\ln(1+y)-\ln(2+y)]_{y=0}^{y=1}\right) = a(2\ln 2-\ln 3) = a(\ln(4/3))
\end{aligned}
$$

et donc $a = \dfrac{1}{\ln(4/3)}$.

(ii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y.

Solution : Soit $x \in \mathbf{R}$. Pour $x \notin [0,1]$, on a $f(x,y) = 0$ pour tout $y \in \mathbf{R}$ et donc $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = 0$. Pour $x \in [0,1]$, on a

$$
\begin{aligned}
f_X(x) = a\int_0^1 \frac{1}{(1+x+y)^2}dy = a\left[\frac{-1}{(1+x+y)}\right]_{y=0}^{y=1} \\
= a(\frac{-1}{2+x}+\frac{1}{1+x}) = \frac{a}{(1+x)(2+x)}.
\end{aligned}
$$

En résumé, on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f_X(x) = \frac{a}{(1+x)(2+x)}\mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

Comme f est symétrique en x et y, on a également pour tout $y \in \mathbf{R}$

$$f_Y(x) = \frac{a}{(1+y)(2+y)}\mathbf{1}_{[0,1]}(y).$$

(iii) X et Y sont-elles indépendantes ?

Solution : Pour $(x,y) \in [0,1]^2$, on a $f_X(x)f_Y(y) = \dfrac{a^2}{(1+x)(2+x)(1+y)(2+y)}$ et $f(x,y) = \dfrac{a}{(1+x+y)^2}$. Les deux fonctions $(x,y) \mapsto \dfrac{a^2}{(1+x)(2+x)(1+y)(2+y)}$ et $(x,y) \mapsto \dfrac{a}{(1+x+y)^2}$ sont différentes : par exemple, on a $f_X(0)f_Y(0) = \dfrac{a^2}{4} \neq a = f(0,0)$; il s'ensuit (voir Cours) que X et Y ne sont pas indépendantes.

(iv) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X,Y)$.

Solution : On a

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx = a\int_0^1 \frac{x}{(1+x)(2+x)}dx \\
= a\int_0^1(\frac{-1}{1+x}+\frac{2}{2+x})dx \\
= a\left[-\ln(1+x)+2\ln(2+x)\right]_0^1 = a(2\ln 3-3\ln 2)
\end{aligned}
$$

et de même $\mathbf{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = a(2\ln 3 - 3\ln 2)$. On a

$$\mathbf{E}(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dxdy = a\int_0^1 \int_0^1 \frac{xy}{(1+x+y)^2} dydx.$$

Or

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{xy}{(1+x+y)^2} dx &= y\int_0^1 \frac{x}{(1+x+y)^2} dx \\
&= y\int_0^1 \frac{1+x+y}{(1+x+y)^2} dx - y\int_0^1 \frac{1+y}{(1+x+y)^2} dx \\
&= y\int_0^1 \frac{1}{(1+x+y)} dx - (y+y^2)\int_0^1 \frac{1}{(1+x+y)^2} dx \\
&= y[\ln(1+x+y)]_{x=0}^{x=1} + (y+y^2)[\frac{1}{1+x+y}]_{x=0}^{x=1} \\
&= y\ln(2+y) - y\ln(1+y) + (y+y^2)(\frac{1}{2+y} - \frac{1}{1+y})
\end{aligned}$$

Par de multiples IPP, on trouve (sous réserve d'éventuelles erreurs de calcul !)

$$\begin{aligned}
\int_0^1 y\ln(2+y)dy &= -\frac{3}{2}\ln 3 + 2\ln 2 + \frac{3}{4} \\
\int_0^1 y\ln(1+y)dy &= -2\ln 2 + \frac{5}{4} \\
\int_0^1 y(\frac{1}{2+y} - \frac{1}{1+y})dy &= -2\ln 3 + 3\ln 2 \\
\int_0^1 y^2(\frac{1}{2+y} - \frac{1}{1+y})dy &= 6\ln 3 - 6\ln 2 - 1.
\end{aligned}$$

On rassemblant tout, on trouve $\mathbf{E}(XY) = a\left(\frac{5}{2}\ln 3 + \ln 2 - \frac{3}{2}\right)$. D'où

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = a\left(\frac{5}{2}\ln 3 + \ln 2 - \frac{3}{2}\right) - a^2(2\ln 3 - 3\ln 2)^2.$$

(v) Soit $x \in [0,1]$. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(Y|X=x)$.
Solution : Pour $y \in \mathbf{R}$, on a

$$\begin{aligned}
f|_{Y|X=x}(y) &= \frac{f(x,y)}{f_X(x)} \\
&= \begin{cases} \frac{a}{(1+x+y)^2} / (\frac{a}{(1+x)(2+x)}) = \frac{(1+x)(2+x)}{(1+x+y)^2} & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(Y|X=x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f|_{Y|X=x}(y)dy \\ &= \int_0^1 y\frac{(1+x)(2+x)}{(1+x+y)^2}dy = (1+x)(2+x)\int_0^1 \frac{y}{(1+x+y)^2}dy.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 \frac{y}{(1+x+y)^2}dy &= \int_0^1 \frac{1+x+y}{(1+x+y)^2}dx - \int_0^1 \frac{1+x}{(1+x+y)^2}dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{(1+x+y)}dx - (1+x)\int_0^1 \frac{1}{(1+x+y)^2}dx \\ &= [\ln(1+x+y)]_{y=0}^{y=1} + (1+x)[\frac{1}{1+x+y}]_{y=0}^{y=1} \\ &= \ln(2+x) - \ln(1+x) + (1+x)\left(\frac{1}{2+x} - \frac{1}{1+x}\right) \\ &= \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) - \frac{1}{2+x}.\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbf{E}(Y|X=x) = (1+x)(2+x)\ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) - (1+x).$$

(v) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(Y|X)$ de Y sachant X.

Solution : Comme $\mathbf{E}(Y|X=x) = (1+x)(2+x)\ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) - (1+x)$, pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\mathbf{E}(Y|X) = (1+X)(2+X)\ln\left(\frac{2+X}{1+X}\right) - (1+X).$$