Université de Rennes 1
Année 2023/024

L3—PS
Feuille de TD 11

Exercice 1. Pour $a \in \mathbf{R}$, soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^+$ définie par

$$f(x, y) = a(x^4 + y^4)\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\mathbf{1}_{[0,1]}(y)$$

(i) Déterminer a.
(ii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y.
(iii) X et Y sont-elles indépendantes ?
(iv) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
(v) Soit $x \in [0, 1]$. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(Y|x)$.
(v) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(Y|X)$ de Y sachant X.

Exercice 2. Soit $\lambda > 0$ un paramètre. Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^+$, définie par

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = a(x + y)e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)\mathbf{1}_{[0,2]}(y),$$

où a est un nombre réel.
(i) Déterminer a en fonction de λ.
(ii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y.
(iii) X et Y sont-elles indépendantes ?
(iv) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
(v) Soit $x \geq 0$. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(Y|X = x)$.
(vi) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(Y|X)$.

Exercice 3. Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x^2 + \dfrac{1}{y}) & \text{si } x \in [0, 1] \text{ et } y \in [1, 2] \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases}$$

où a est un nombre réel.
(i) Déterminer a.
(ii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y.
(iii) X et Y sont-elles indépendantes ?
(iv) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
(v) Soit $x \in [0, 1]$. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(Y|X = x)$. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(Y|X)$.

Exercice 4. (i) Soit V une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$; rappeler les valeurs de $\mathbf{E}(V)$ et $\mathrm{Var}(V)$. Calculer $\mathbf{E}(V^3)$.

Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité f définie par

$$\forall (x, y \in \mathbf{R}^2 : \qquad f(x,y) = ax(y-x)e^{-y}\mathbf{1}_{\{0<x\leq y\}}(x,y),$$

c-à-d

$$f(x,y) = \begin{cases} ax(y-x)e^{-y} & \text{si } 0 < x \leq y < +\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où a est un nombre réel.
(ii) Déterminer a.
(iii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y.
(iv) X et Y sont-elles indépendantes ?
(v) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
(vi) Soit $x \geq 0$. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(Y|X = x)$.
(vii) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(Y|X)$.

Exercice 5. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes et suivant chacune une loi normale centrée-réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
(i) Déterminer la densité du couple aléatoire $Z = (X, Y)$.
Soit T la v.a.r définie sur $\{X \neq 0\}$ par $T = Y/X$ et par $T = 0$ sur $\{X = 0\}$.
(ii) $(*)$ Déterminer la fonction de répartition de T. (*Indication :* penser aux coordonnées polaires). Montrer que T possède une densité et la déterminer.

Exercice 6. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant des lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\beta)$, respectivement.
(i) Quelle est la densité du couple aléatoire $Z = (X, Y)$?
(ii) Déterminer la densité f_{X+Y} de la v.a.r. $X + Y$ dans le cas $\lambda \neq \beta$.
(iii) Déterminer la densité f_{X+Y} de la v.a.r. $X + Y$ dans le cas $\lambda = \beta$.