

**Université de Rennes 1—Année 2024/2025**  
**L3—PS—Feuille de TD 10**

**Exercice 1.** On lance une fléchette sur une cible circulaire

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

de rayon 1. On suppose que le point d'impact  $Z$  de la fléchette est uniformément distribué sur la cible  $D$ . On écrit  $Z = (X, Y)$ , où  $X$  et  $Y$  sont les coordonnées cartésiennes du point d'impact.

- (i) Quelle est la densité de  $Z$ ?
- (ii) Déterminer les densités marginales  $f_X$  et  $f_Y$ .

**Exercice 2.** Pour  $a \in \mathbf{R}$ , soit  $(X, Y)$  un couple aléatoire de densité  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^+$ , donnée par  $f(x, y) = \begin{cases} a(x+y) & \text{si } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

- (i) Calculer  $a$ .
- (ii) Déterminer les densités  $f_X$  et  $f_Y$  de  $X$  et de  $Y$ .
- (iii)  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?
- (iv) Calculer la covariance  $\mathbf{Cov}(X, Y)$ .

**Exercice 3.** Soit  $(X, Y)$  un couple aléatoire de densité  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  définie par

$$f(x, y) = a(\sin(x) + \sin(y))\mathbf{1}_{[0, \pi/2]}(x)\mathbf{1}_{[0, \pi/2]}(y)$$

où  $a$  est un nombre réel.

- (i) Calculer  $\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$  et  $\int_0^{\pi/2} x \sin(x)dx$ .
- (ii) Déterminer  $a$ .
- (iii) Déterminer les densités  $f_X$  et  $f_Y$  de  $X$  et de  $Y$ .
- (iv)  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes? (Justifier votre réponse.)
- (v) Calculer la covariance  $\mathbf{Cov}(X, Y)$ .
- (vi) Soit  $x \in ]0, \pi/2[$ . Déterminer l'espérance conditionnelle  $\mathbf{E}(Y|X = x)$ .
- (vii) Déterminer l'espérance conditionnelle  $\mathbf{E}(Y|X)$ .

**Exercice 4.** Soit  $(X, Y)$  un couple aléatoire de densité  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^+$ , définie par

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = a(x+y)e^{-x}\mathbf{1}_{[0, +\infty[}(x)\mathbf{1}_{[0, 2]}(y),$$

où  $a$  est un nombre réel.

- (i) Déterminer  $a$ .
- (ii) Déterminer les densités  $f_X$  et  $f_Y$  de  $X$  et de  $Y$ .
- (iii)  $X$  et  $Y$  sont-elles indépendantes?
- (iv) Calculer la covariance  $\mathbf{Cov}(X, Y)$ .
- (v) Soit  $x \geq 0$ . Déterminer l'espérance conditionnelle  $\mathbf{E}(Y|X = x)$ .
- (vi) Déterminer l'espérance conditionnelle  $\mathbf{E}(Y|X)$ .