

L3-PS—Feuille de TD 1

**Exercice 1.** Soient  $\Omega$  un ensemble et  $A, B, C$  des parties de  $\Omega$ . Parmi les propositions suivantes, prouver celles qui sont vraies et donner des contre-exemples pour les autres :

1.  $(A \cup B = \Omega) \implies (A \subset B^c)$
2.  $(A \cup B = \Omega) \implies (A^c \subset B)$
3.  $(A \cup B = \Omega \text{ et } A \cap B = \emptyset) \implies (A = B^c)$
4.  $(A \subset B^c) \implies (A \cup B = \Omega)$
5.  $C \subset A \cup B \implies C \subset A \text{ ou } C \subset B$
6.  $A \cup B = B \cap C \iff A \subset B \subset C$ .

**Exercice 2. (Règles de Morgan)** Soit  $\Omega$  un ensemble et  $A, B, C$  des parties de  $\Omega$ .

- (i) Montrer que  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ .
- (ii) Montrer que  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .
- (iii) Montrer que  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .
- (iv) Montrer que  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .

**Exercice 3. (Propriétés de l'image réciproque par une application)** Soient  $\Omega$  et  $E$  deux ensembles et  $f : \Omega \rightarrow E$  une application. L'image réciproque d'une partie  $B$  de  $E$  par  $f$  est la partie de  $\Omega$  définie par  $f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \in B\}$ .

Montrer que, pour toute partie  $B$  de  $E$  et toute famille  $(B_i)_{i \in I}$  de parties de  $E$ , on a les formules suivantes :

$$f^{-1}(B^c) = f^{-1}(B)^c, f^{-1}(\cup_{i \in I} B_i) = \cup_{i \in I} f^{-1}(B_i), f^{-1}(\cap_{i \in I} B_i) = \cap_{i \in I} f^{-1}(B_i).$$

**Exercice 4. (\*)** Soit  $\Omega$  un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective  $\Omega \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ . Indication : On pourra supposer, par l'absurde, qu'une telle application  $f$  existe; considérer la partie  $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin f(\omega)\}$  de  $\Omega$  et un antécédent  $\omega_0 \in \Omega$  de  $A$  par  $f$ ; se demander si  $\omega_0$  appartient à  $A$ .

**Exercice 5.** Soit  $\Omega$  un ensemble; pour toute partie  $A$  de  $\Omega$ , on rappelle que  $\mathbf{1}_A$  est la fonction indicatrice de  $A$ , c-à-d la fonction définie par  $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$  si  $\omega \in A$  et  $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$  sinon.

(i) Montrer que, pour toutes parties  $A, B$  de  $\Omega$ , on a

$$\mathbf{1}_{A^c} = \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_A, \quad \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{A^c} = 0, \quad \mathbf{1}_A \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A, \\ \mathbf{1}_{A \cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B, \quad \mathbf{1}_{A \cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A \cap B}.$$

(ii) Soient  $A, B, C$  des parties de  $\Omega$ . Etablir que

$$(\mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_A)(\mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_B)(\mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_C) = \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_{A \cap B} + \mathbf{1}_{A \cap C} + \mathbf{1}_{B \cap C} - \mathbf{1}_{A \cap B \cap C}$$

et en déduire que

$$\mathbf{1}_{A \cup B \cup C} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - \mathbf{1}_{A \cap B} - \mathbf{1}_{A \cap C} - \mathbf{1}_{B \cap C} + \mathbf{1}_{A \cap B \cap C}.$$

**Exercice 6.** Soit  $\Omega$  un ensemble. Décrire une bijection entre l'ensemble  $\mathcal{P}(\Omega)$  des parties de  $\Omega$  et  $\mathcal{F}(\Omega, \{0, 1\})$ . Déterminer  $\text{Card}(\mathbf{P}(\Omega))$ .

Indication : Utiliser les fonctions indicatrices.

**Exercice 7.** Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5 et 8 boules noires numérotées de 6 à 13. On tire successivement 6 boules de l'urne de manière aléatoire ; à chaque fois, on note le numéro de la boule tirée et on la remet ensuite dans l'urne. On modélise l'ensemble des résultats possibles par l'univers  $\Omega = \{1, \dots, 13\}^6$ . Combien y a-t-il de tirages possibles ? Dans combien de tirages obtient-on :

- (1) 5 boules noires et une blanche, dans cet ordre ?
- (2) 5 boules noires et une blanche, dans n'importe quel ordre ?
- (3) 1 boule noire au plus ?
- (4) 3 boules blanches exactement ?
- (5) 1 boule blanche au moins ?

Reprendre les questions précédents en supposant cette fois que les boules ne sont pas remises dans l'urne après tirage.