Université de Rennes 1–Année 2023/2024

L3-PS–Feuille de TD 1

Exercice 1. Soient Ω un ensemble et A, B, C des parties de Ω.
Parmi les propositions suivantes, prouver celles qui sont vraies et donner des contre-exemples pour les autres :

1. $(A \cup B = \Omega) \Longrightarrow (A \subset B^c)$
2. $(A \cup B = \Omega) \Longrightarrow (A^c \subset B)$
3. $(A \cup B = \Omega \text{ et } A \cap B = \emptyset) \Longrightarrow (A = B^c)$
4. $(A \subset B^c) \Longrightarrow (A \cup B = \Omega)$
5. $C \subset A \cup B \Longrightarrow C \subset A$ ou $C \subset B$
6. $A \cup B = B \cap C \Longleftrightarrow A \subset B \subset C$.

Exercice 2. (Règles de Morgan) Soit Ω un ensemble et et A, B, C des parties de Ω.
(i) Montrer que $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
(ii) Montrer que $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
(iii) Montrer que $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$.
(iv) Montrer que $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Exercice 3. (i) Soient E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et k. Déterminer (avec preuve) le cardinal $\mathrm{Card}(E \times F)$ du produit cartésien $E \times F$.
(ii) Soient $F_1, \dots, F_n$ des ensembles finis. Déterminer au moyen d'une récurrence $\mathrm{Card}(F_1 \times \cdots \times F_n)$.

Exercice 4. Soit Ω un ensemble ; pour toute partie A de Ω, on rappelle que $\mathbf{1}_A$ est la fonction indicatrice de A, c-à-d la fonction définie par $\mathbf{1}_A(\omega) = 1$ si $\omega \in A$ et $\mathbf{1}_A(\omega) = 0$ sinon.

(i) Montrer que, pour toutes parties A, B de Ω, on a

$$\mathbf{1}_{A^c} = \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_A,\ \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{A^c} = 0,\ \mathbf{1}_A \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_A,$$
$$\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B,\ \mathbf{1}_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}.$$

(ii) Soient A, B, C des parties de Ω. Etablir que

$$(\mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_A)(\mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_B)(\mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_C) = \mathbf{1}_\Omega - \mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_C + \mathbf{1}_{A\cap B} + \mathbf{1}_{A\cap C} + \mathbf{1}_{B\cap C} - \mathbf{1}_{A\cap B\cap C}$$

et en déduire que

$$\mathbf{1}_{A\cup B\cup C} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B + \mathbf{1}_C - \mathbf{1}_{A\cap B} - \mathbf{1}_{A\cap C} - \mathbf{1}_{B\cap C} + \mathbf{1}_{A\cap B\cap C}.$$

Exercice 5. Soit Ω un ensemble. Décrire une bijection entre l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω et $\mathcal{F}(\Omega, \{0,1\})$. Déterminer $\mathrm{Card}(\mathbf{P}(\Omega))$.
Indication : Utiliser les fonctions indicatrices.

Exercice 6. $(*)$ Soit Ω un ensemble. Montrer qu'il n'existe pas d'application surjective $\Omega \to \mathcal{P}(\Omega)$. Indication : On pourra supposer, par l'absurde, qu'une telle application f existe ; considérer la partie $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin f(\omega)\}$ de Ω et un antécédent $\omega_0 \in \Omega$ de A par f; se demander si ω_0 appartient à A.

Exercice 7. Une urne contient 5 boules blanches numérotées de 1 à 5 et 8 boules noires numérotées de 6 à 13. On tire successivement 6 boules de l'urne de manière aléatoire ; à chaque fois, on note le numéro de la boule tirée et on la remet ensuite dans l'urne. On modélise l'ensemble des résultats possibles par l'univers $\Omega = \{1, \ldots, 13\}^6$. Combien y a-t-il de tirages possibles ? Dans combien de tirages obtient-on :

(1) 5 boules noires et une blanche, dans cet ordre ?
(2) 5 boules noires et une blanche, dans n'importe quel ordre ?
(3) 1 boule noire au plus ?
(4) 3 boules blanches exactement ?
(5) 1 boule blanche au moins ?