Université de Rennes 1
Année 2023/2024
Licence de Mathématiques 3

20 Décembre 2023

L3-PS–Contrôle Continu No 3

Durée : 120 minutes.

Aucun document n'est autorisé- Le barême est indicatif
Tout résultat est à justifier !

Questions de cours. (5P.)
(i) Vingt chevaux sont au départ d'une course. Un tiercé est la donnée des trois chevaux arrivés en tête.
(1) Quel est le nombre de tiercés dans l'ordre.
(2) Quel est le nombre de tiercés dans le désordre.

(ii) Dans d'un jeu 32 cartes, comportant quatre couleurs ("pique", "trèfle", etc) formées de 8 cartes ("As", "Roi", etc) chacune ; on tire 3 cartes **simultanément** au hasard.
(1) Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ modélisant cette expérience aléatoire.
(2) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux "As".

(iii) Un atelier reçoit 5000 circuits intégrés, 1000 en provenance de l'usine A et 4000 de l'usine B. On sait que 10% des circuits fabriqués par l'usine A et que 5% de ceux fabriqués par l'usine B sont défectueux. On choisit au hasard un circuit intégré à l'atelier et on trouve qu'il est défecteux. Quelle est la probabilité que ce circuit provienne de l'usine A?

(iv) Une personne souhaite prendre 10 fois le métro durant le mois prochain. Le prix d'un ticket de métro est de 1 € et celui d'une amende est de 50 € , en cas d'absence de ticket. En moyenne, 1 trajet sur 20 est contrôlé. La personne envisage de ne jamais acheter de ticket. Soit X le nombre de contrôles lors de 10 trajets et soit Y l'économie réalisée (la différence entre ce que la personne devra effectivement payer et ce qu'elle aura à payer si elle ne fraude pas).
(1) Déterminer la loi de X et calculer $\mathbf{E}(X)$.
(2) Exprimer Y en fonction de X et calculer $\mathbf{E}(Y)$; conclusion ?

Exercice 1. (4P.) Soient X et Y deux v.a.r qui suivent des lois de Bernoulli, de paramètres 1/2 et 1/3 respectivement. On pose $a := \mathbf{P}(X = 1, Y = 1)$.

Tourner la page s.v.p

(i) Déterminer la loi conjointe de (X, Y) en fonction de a et présenter le résultat sous forme de tableau.
(ii) Identifier la loi de XY.
(iii) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$ en fonction de a.
(iv) On suppose que X et Y sont non corrélées. Montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 2. (2P.) Soit X une variable aléatoire continue de densité f, donnée pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $f(x) = \dfrac{ax}{1+x^2}\mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, où a est un nombre réel.
(i) Déterminer a.
(ii) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(X = 0,3)$ et $\mathbf{P}(-1 < X \leq 1/2)$. (Justifier vos réponses)

Exercice 3. (3P.) Soit X une variable aléatoire continue de densité f, donnée pour tout $x \in \mathbf{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{2(1+|x|)^2}.$$

Pour un paramètre $\alpha > 0$, soit $Y = \alpha \ln(1 + |X|)$,
(i) Déterminer la densité de Y en fonction de α.
(ii) Reconnaitre la loi de Y; quelle est son espérance ?
iii) Calculer $\mathbf{E}(Ye^{-3Y})$.

Exercice 4. (7P.) Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

$$f(x, y) = a(\sin(x) + \sin(y))\mathbf{1}_{[0,\pi/2]}(x)\mathbf{1}_{[0,\pi/2]}(y)$$

où a est un nombre réel.
(i) Calculer $\int_0^{\pi/2} \sin(x)dx$ et $\int_0^{\pi/2} x\sin(x)dx$.
(ii) Déterminer a.
(iii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y.
(iv) X et Y sont-elles indépendantes ? (Justifier votre réponse.)
(v) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
(vi) Soit $x \in]0, \pi/2[$. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(Y|X = x)$.
(vii) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(Y|X)$.