Université de Rennes 1
Année 2024/2025

PS – CC2 du 25/11/2024, L3

Exercice 1 (6P.) Soit X une v.a.r. sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ avec $X(\Omega) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ et dont la loi est donnée par $\mathbf{P}(X = -2) = \mathbf{P}(X = 0) = \mathbf{P}(X = 2) = 1/6$ et $\mathbf{P}(X = -1) = \mathbf{P}(X = 1) = 1/4$. Soit $Y = X^2 + 1$

(i) Déterminer la loi de Y.

Solution : On a $Y(\Omega) = \{x^2 + 1 | x \in X(\Omega) = \{1, 2, 5\}$ ainsi que

$$\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(X = 0) = 1/6, \mathbf{P}(Y = 2) = \mathbf{P}(X = 1) + \mathbf{P}(X = -1) = 1/2, \mathbf{P}(Y = 5) = \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = -2) = 1/3.$$

(ii) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y), en présentant le résultat sous forme de tableau.

Solution : Pour tous i, j on a $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \mathbf{P}(X = i, X^2 + 1 = j) = \mathbf{P}(X = i)$ si $j = i^2 + 1$ et $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = 0$ sinon et on obtient donc le tableau suivant

Y/X	−2	−1	0	1	2	P_Y
1	0	0	1/6	0	0	1/6
2	0	1/4	0	1/4	0	1/2
5	1/6	0	0	0	1/6	1/3
P_X	1/6	1/4	1/6	1/4	1/6	1

(iii) Calculer la covariance Cov(X, Y).

Solution : On a $\mathbf{E}(X) = (-2)(1/6) + (-1)(1/4) + (0)(1/6) + (1)(1/4) + (2)(1/6) = 0$, $\mathbf{E}(Y) = (1)(1/6) + (2)(1/2) + (5)(1/3) = 17/6$, $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X(X^2 + 1)) = \mathbf{E}(X^3 + X) = \mathbf{E}(X^3) + \mathbf{E}(X) = 0 + 0 = 0$, car $\mathbf{E}(X^3) = (-8)(1/6) + (-1)(1/4) + (0)(1/6) + (1)(1/4) + (8)(1/6) = 0$. D'où $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) = 0$

(iv) X et Y sont elles indépendantes ?

Solution : Non, X et Y ne sont pas indépendantes car (par exemple) $\mathbf{P}(X = 1, Y = 1) = 0$ mais $\mathbf{P}(X = 1)\mathbf{P}(Y = 1) \neq 0$.

Exercice 2 (6P.) Une station service fait en début de chaque semaine le plein de son réservoir. Une analyse statistique montre que la demande hebdomadaire des clients, en milliers de litres d'essence, est bien approchée par une variable aléatoire X de densité $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée, pour une constante $c \in \mathbf{R}$, par $f(x) = c(1-x)^4 \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

(i) Déterminer c.

Solution : On doit avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, c-à-d $c\int_0^1 (1-x)^4 dx = 1$. On a $\int_0^1 (1-x)^4 dx = -\frac{1}{5}(1-x)^5|_0^1 = 1/5$ et donc $\boxed{c = 5.}$

(ii) Quelle doit être la contenance du réservoir de la station en début de semaine pour garantir que la probabilité d'être à court d'essence soit inférieure à 10^{-3} ?

Solution : La contenance $a > 0$ cherchée est telle que $\mathbf{P}(X > a) = 10^{-3}$ c-à-d $\mathbf{P}(X \le a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = 1-10^{-3}$. Or $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = 5\int_0^a (1-x)^4 dx = -(1-x)^5|_0^a = 1-(1-a)^5$ pour $a \in [0,1]$, ainsi que $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = 0$ pour $a < 0$ et $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = 1$ pour $a > 1$. pour $a > 1$.

On doit donc avoir $(1-a)^5 = 10^{-3}$, c-à-d $1-a = 10^{-3/5}$ et donc $\boxed{a = 1-10^{-3/5} = 1-\frac{1}{1000^{1/5}} \approx 0.75}$

(iii) Combien de litres d'essence la station vend elle en moyenne par semaine ?

Solution : En moyenne $\mathbf{E}(X)$ litres sont vendus ; on a (avec une IPP) $\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 5\int_0^1 x(1-x)^4 dx = -x(1-x)^5|_0^1 + \int_0^1 (1-x)^5 dx = -\frac{1}{6}(1-x)^6|_0^1 = \frac{1}{6} \approx 0.2$.

Exercice 3 (8P.) Soit X une variable aléatoire de densité $x \mapsto f(x) = \frac{a}{x+1}\mathbf{1}_{[0,e-1]}(x)$, où a est un nombre réel.

(i) Déterminer a.

Solution : On doit avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, c-à-d $1 = a\int_0^{e-1}\frac{1}{x+1}dx = a[\ln(x+1)]_0^{e-1} = a(\ln(e)-\ln(1)) = a(1+0) = a$ et donc $\boxed{a=1}$.

(ii) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(X=1)$ et $\mathbf{P}(0 < X < 2)$ et $\mathbf{P}(X > 3)$. *(A toute fin utile, on signale que $e \approx 2,718$).*

Solution : On a $\mathbf{P}(X = 1) = 0$, car X est une v.a.r. continue. On a $\mathbf{P}(0 < X < 2) = \int_0^{+\infty} f(x)dx \underset{(e-1<2)}{=} \int_0^{e-1}\frac{1}{x+1}dx = [\ln(x+1)]_0^{e-1} = 1$ et $\mathbf{P}(X > 3) = \int_3^{+\infty} f(x)dx \underset{(e-1<3)}{=} \int_3^{+\infty} 0dx = 0$.

(iii) Calculer l'espérance de X.

Solution : $\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \int_0^{e-1}\frac{x}{x+1}dx = \int_0^{e-1}\frac{(x+1)-1}{x+1}dx = \int_0^{e-1}(1-\frac{1}{x+1})dx = [x-\ln(x+1)]_0^{e-1} = e-1-1 = e-2$.

(iv) Soit $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Y ainsi que la densité de Y.

Solution : Soit $y \in \mathbf{R}$. Si $y < 0$, alors $F_Y(y) = \mathbf{P}(X^2 \le y) = 0$, car $X^2 \ge 0$. Soit $y \ge 0$; alors $F_Y(y) = \mathbf{P}(X^2 \le y) = \mathbf{P}(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}) = \int_{-\sqrt{y}}^{-\sqrt{y}} f(x)dx = \int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{x+1}dx$. Si $\sqrt{y} \ge e-1$, c-à-d si $y \ge (e-1)^2$, alors $F_Y(y) = \int_0^{e-1}\frac{1}{x+1}dx = 1$. Si $\sqrt{y} \le e-1$, c-à-d $y \le (e-1)^2$, alors $F_Y(y) = \int_0^{\sqrt{y}}\frac{1}{x+1}dx = [\ln(x+1)]_0^{\sqrt{y}} = \ln(\sqrt{y}+1)$. En résumé, on $F_Y(y) = 0$ si $y < 0$, $F_Y(y) = \ln(\sqrt{y}+1)$ si $0 \le y \le (e-1)^2$ et $F_Y(y) = 1$ si $y \ge (e-1)^2$. On obtient la densité f_Y de Y en dérivant F_Y : $f_Y(y) = \begin{cases} 0 \quad \text{si} \quad y < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{y}(\sqrt{y}+1)} \quad \text{si} \quad 0 \le y \le (e-1)^2 \\ 0 \quad \text{si} \quad y \ge (e-1)^2. \end{cases}$