Université de Rennes 1
Année 2023/2024

L3

PS – CC2 du 21/11/2023

Durée : 45 minutes; documents et calculettes non autorisés

Exercice 1 (6P.) Un marchand de pommes se fait livrer en début de chaque semaine un stock de pommes. La demande hebdomadaire des clients, en kilos, est une variable aléatoire X de densité $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par

$$f(x) = \frac{3}{10^6}(100 - x)^2 \mathbf{1}_{[0,100]}(x)$$

pour tout $x \in \mathbf{R}$.
On notera k le poids du stock.
(i) Combien de kilos de pommes le marchand vend-il en moyenne par semaine ?
(ii) Le marchand veut pouvoir satisfaire toutes les demandes des clients jusqu'à la fin de la semaine. Exprimer en fonction de X et k l'évènement " Toutes les demandes des clients jusqu'à la fin de la semaine sont satisfaites"
(iii) Quelle doit être le poids du stock en début de semaine pour garantir avec une probabilité égale à $1 - 10^{-3}$ que toutes les demandes des clients jusqu'à la fin de la semaine soient satisfaites ?

Exercice 2 (8P.) Pour un paramètre $a \in \mathbf{R}$, soit X une variable aléatoire continue de densité $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ donnée par $f(x) = \dfrac{a}{(1+x)^2}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
(i) Déterminer a
Soit $Y = \ln(X + 1)$.
(ii) Exprimer la fonction de répartition F_Y de Y en fonction de celle de X.
(iii) Montrer que Y possède une densité et la calculer.
(iv) Reconnaître la loi de Y.

Exercice 3 (8P.) Pour un paramètre $a \in \mathbf{R}$, soit X une variable aléatoire continue de densité f donnée par $f(x) = \dfrac{a}{x^4}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$
(i) Déterminer a
(ii) Calculer $\mathbf{P}(X = 0)$, $\mathbf{P}(X \le 1)$, $\mathbf{P}(0 < X < 2)$ et $\mathbf{P}(X > 3)$.
(iii) Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
(iv) (*) Soit $a > 0$ fixé. Pour tout $x > 0$, on pose $\varphi(x) = \mathbf{P}(X > x + a | X > x)$. Calculer $\varphi(x)$ et montrer que $x \mapsto \varphi(x)$ est une fonction croissante sur $]0, +\infty[$.