Université de Rennes 1—Année 2023/2024
L3—PS—Feuille de TD 8

Exercice 1. Soit X une v.a.r suivant une loi exponentielle de paramètre λ . Déterminer la loi de la partie entière $[X]$ de X .

Exercice 2. Soit X une v.a.r suivant la loi uniforme sur $[0, \pi]$. Montrer que $Y = \cos(X)$ suit une loi continue dont on déterminera la densité.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire de densité $x \mapsto f(x) = \frac{a}{x^2 + 1} \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, où a est un nombre réel.

- (i) Déterminer a .
- (ii) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(X \in \{1/3, 1/2\})$, $\mathbf{P}(\{X \geq 1\} \cup \{X \leq 0\})$ et $\mathbf{P}(1/2 < X \leq 3)$.
- (iii) Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(X)$.
- (iv) Déterminer la fonction de répartition de $Y = 1 - X^2$ ainsi que sa densité.

Exercice 4. On casse un bâton de longueur 1. On suppose que le point de rupture X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$. Soient $Y = \max\{X, 1 - X\}$ et $Z = \min\{X, 1 - X\}$

- (i) Calculer $\mathbf{P}(X = Z)$ et $\mathbf{P}(X = Y)$.
- (ii) Calculer $\mathbf{P}(\{Y \geq 3Z\} \cap \{X \leq 1/2\})$ et $\mathbf{P}(\{Y \geq 3Z\} \cap \{X > 1/2\})$.
- (iii) Calculer la probabilité que le grand morceau après la rupture du bâton soit au moins 3 fois plus grand que le petit morceau.

Exercice 5. Soit X une v.a.r suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et soit $Y = X^2$.

- (i) Déterminer une densité g de Y .
- (ii) Calculer, en justifiant leur existence, $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{Var}(Y)$.

Exercice 6. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.

- (i) Justifier l'existence de I_n et établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n pour $n \in \mathbf{N}$.
- (ii) Calculer I_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Soit X une v.a.r. qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

- (iii) Calculer, pour tout $n \geq 1$, le moment $\mathbf{E}(X^n)$ d'ordre n de X .

Exercice 7. (*) Des clients arrivent à un guichet de manière aléatoire. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $t > 0$, le nombre de clients arrivant entre les instants 0 et $t > 0$ est une v.a.r. N_t qui suit une loi de Poisson de paramètre αt . Soit X_1 l'instant d'arrivée du premier client.

- (i) Déterminer $\mathbf{P}(X_1 > t)$ et en déduire que X_1 suit une loi exponentielle.
- (ii) Calculer $\mathbf{E}(X_1)$ et $\mathbf{Var}(X_1)$.
- (iii) Pour $n \geq 1$, soit X_n l'instant d'arrivée du n -ième client. Déterminer $\mathbf{P}(X_n > t)$ et en déduire la fonction de répartition de X_n .
- (iv) Montrer que X_n est une v.a. continue et en déterminer une densité. En utilisant l'Exercice 5, calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{Var}(X_n)$.