Université de Rennes 1
Année 2022/2023

L3—PSIN/PRB–Feuille de TD 9

Exercice 1. Soit X une v.a.r suivant la loi uniforme sur $[0, \pi]$. Montrer que $Y = \cos(X)$ suit une loi continue dont on déterminera la densité.

Exercice 2. Soit X une v.a.r. continue sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et f sa densité.
(i) Montrer que e^X est une v.a.r. continue et calculer sa densité. Expliciter cette densité dans le cas où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.
(ii) On suppose que $X > 0$. Montrer que $1/X$ est une v.a.r. continue et calculer sa densité.
(iii) Montrer que $|X|$ est une v.a.r. continue et calculer sa densité.
(iv) Montrer que X^2 est une v.a.r. continue et calculer sa densité. Expliciter cette densité dans le cas où $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Exercice 3. On lance n-fois une pièce de monnaie qui donne Pile avec la probabilité $p \in [0,1]$. Soit P_n (resp. F_n) la variable aléatoire égale au nombre de Piles (resp. Faces) obtenus au cours de ces lancers et soit $X_n = \dfrac{F_n - P_n}{n}$. Montrer que $(X_n)_n$ converge en probabilité vers $1-2p$.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{F}$ tels que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $\mathbf{P}(\Omega_1) = \mathbf{P}(\Omega_2)$. Pour $n \geq 1$, soit $X_{2n} = \mathbf{1}_{\Omega_1}$ et $X_{2n+1} = \mathbf{1}_{\Omega_2}$.
(i) Déterminer la loi de X_n.
(ii) Déduire de (i) que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1$.
(iii) Calculer $\mathbf{P}(|X_{2n} - X_1| \geq 1)$.
(iv) Déduire de (iii) que $(X_n)_n$ ne converge pas en probabilité vers X_1.

Exercice 5. Pour $n \geq 1$, on considère une v.a.r X_n suivant la loi uniforme sur $\{k/n \ : \ k = 0, \ldots, n\}$. Montrez que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où X suit une loi uniforme sur $[0,1]$.