

Université de Rennes 1—Année 2021/2022
L3—PSIN/PRB—Feuille de TD 9

Exercice 1. Soit X une v.a.r. continue sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et f sa densité.

- (i) Montrer que e^X est une v.a.r. continue et calculer sa densité. Expliciter cette densité dans le cas où $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
- (ii) On suppose que $X > 0$. Montrer que $1/X$ est une v.a.r. continue et calculer sa densité.
- (iii) Montrer que $|X|$ est une v.a.r. continue et calculer sa densité.

Exercice 2. Une compagnie aérienne assure une liaison aérienne entre deux villes par un avion de 150 places. Des estimations ont montré que la probabilité pour qu'une personne confirme sa réservation est $p = 0.75$. La compagnie vend n billets avec $n > 150$ ("surbooking"). Soit X le nombre de personnes parmi les n possibles qui confirment leur réservation.

- (i) Quelle est la loi exacte de X .
- (ii) (*) Soit n le nombre de places que la compagnie peut vendre pour que, au risque de 5%, elle soit sûre que tout le monde puisse monter dans l'avion. Etablir une inégalité qui doit satisfaire n ; déterminer ensuite n . (*Indication* : On considérera que $Z = (X - \mathbb{E}(X))/\sqrt{\text{Var}(X)}$ suit approximativement une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et on se rappellera que $\mathbf{P}(Z \leq 1.645) = 0.95$.)

Exercice 3. Une équipe de surveillance cherche à savoir si les huîtres d'un certain bassin ont été contaminées. Sur un échantillon de 200 huîtres, elle dénombre 32 huîtres atteintes. Déterminer un intervalle de confiance, au risque de 5%, pour la proportion d'huîtres contaminées dans le bassin. (*Indication* : On se rappellera que $\mathbf{P}(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.)

Exercice 4. Soit

$$f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^+, (x, y) \mapsto \begin{cases} x + y & \text{si } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

- (i) Vérifier que f est bien une densité.
Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité f .
- (ii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y .
- (iii) X et Y sont-elles indépendantes ?
- (iv) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^+, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{e^{-x/y} e^{-y}}{y} & \text{si } 0 < x, 0 < y \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$

- (i) Vérifier que f est bien une densité.
Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité f .
- (ii) Déterminer la densité f_Y de Y .
- (iii) X et Y sont-elles indépendantes ?
- (iv) Calculer $\mathbb{E}(X)$ au moyen de la formule de transfert $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy$.
- (v) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$.