Université de Rennes 1–Année 2021/2022

L3—PRB/PSI1–Feuille de TD 8

Exercice 1. On considère un lot d'ampoules électriques. On suppose qu'il existe $\lambda > 0$ tel que la durée de vie de chaque ampoule est une v.a.r T avec $\mathbf{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \geq 0$.

(i) Déterminer la loi de T et la reconnaître. Déterminer la durée de vie moyenne $\mathbb{E}(T)$ et l'écart-type $\sigma(T)$.

On branche en série 2 ampoules issues du même lot et de durées de vie indépendantes T_1 et T_2. Soit U l'instant où au moins une des ampoules cesse de fonctionner.
(ii) Calculer $\mathbf{P}(U > t)$ pour $t \in \mathbf{R}$.
(iii) Déterminer la fonction de répartition de U et reconnaître sa loi.
(iv) On mesure la durée de vie des ampoules en mois. En prenant $\lambda = 1/10$, après combien de mois en moyenne au moins une des deux ampoules cessera-t-elle de fonctionner ?

Exercice 2. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$.
(i) Justifier l'existence de I_n et établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n pour $n \in \mathbf{N}$.
(ii) Calculer I_n pour tout $n \in \mathbf{N}$.
Soit X une v.a.r. qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.
(iii) Calculer, pour tout $n \geq 1$, le moment $\mathbb{E}(X^n)$ d'ordre n de X.

Exercice 3. (*) Des clients arrivent à un guichet de manière aléatoire. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $t > 0$, le nombre de clients arrivant entre les instants 0 et $t > 0$ est une v.a.r. N_t qui suit une loi de Poisson de paramètre αt. Soit X_1 l'instant d'arrivée du premier client.
(i) Déterminer $\mathbf{P}(X_1 > t)$ et en déduire que X_1 suit une loi exponentielle.
(ii) Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathrm{Var}(X_1)$.
(iii) Pour $n \geq 1$, soit X_n l'instant d'arrivée du n-ième client. Déterminer $\mathbf{P}(X_n > t)$ et en déduire la fonction de répartition de X_n.
(iv) Montrer que X_n est une v.a. continue et en déterminer une densité. En utilisant l'Exercice 2, calculer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathrm{Var}(X_n)$.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $\Omega_1, \Omega_2 \in \mathcal{F}$ tels $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $\mathbf{P}(\Omega_1) = \mathbf{P}(\Omega_2)$. Pour $n \geq 1$, soit $X_{2n} = \mathbf{1}_{\Omega_1}$ et $X_{2n+1} = \mathbf{1}_{\Omega_2}$.
(i) Déterminer la loi de X_n.
(ii) Déduire de (i) que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_1$.
(iii) Calculer $\mathbf{P}(|X_{2n} - X_1| \geq 1)$.
(iv) Déduire de (iii) que $(X_n)_n$ ne converge pas en probabilité vers X_1.

Exercice 5. Pour $n \geq 1$, on considère une v.a.r X_n suivant la loi uniforme sur $\{k/n \,:\, k = 0, \ldots, n\}$. Montrez que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ où X suit une loi uniforme sur $[0, 1]$.