Université de Rennes 1–Année 2022/2023

L3—PRB/PSI1–Feuille de TD 7

Exercice 1. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et (X, Y) un couple de variables aléatoires avec $X(\Omega) = \{-1, 1\}, Y(\Omega) = \{1, 2\}$. On suppose que $\mathbf{P}(X = -1) = 1/4$ et $\mathbf{P}(Y = 1) = 1/3$ et on pose $p = \mathbf{P}(X = -1, Y = 1)$.
(i) Exprimer en fonction de p la loi conjointe de X et Y et présenter le résultat sous forme d'un tableau.
(ii) Quelles conditions doit-on imposer à p?
(iii) Déterminer p pour que X et Y soient indépendantes.
(iv) Calculer $\mathbf{E}(XY)$ quand p est comme dans (iii).

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a.r qui suivent des lois de Bernoulli, de paramètres $1/2$ et $1/3$ respectivement. On pose $p := \mathbf{P}(X = 1, Y = 1)$.
(i) Déterminer la loi conjointe de (X, Y) en fonction de p et présenter le résultat sous forme de tableau. Quelle condition doit satisfaire p?
(ii) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$ en fonction de p.

Exercice 3. Soient X et Y deux v.a.r à valeurs dans $\mathbf{N}$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbf{R}$ tel que $\mathbf{P}(X = i, Y = j) = \dfrac{a}{i!j!}$ pour tout $(i, j) \in \mathbf{N}^2$.
(i) Déterminer la valeur de a.
(ii) Quelles sont les lois marginales de X et de Y?
(iii) X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 4. **(*)** Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et suivant des lois géométriques de paramètres p_1 et p_2. On considère la matrice aléatoire

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix},$$

c-à-d l'application $\Omega \to M_2(\mathbf{R})$ définie par $A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & 1 \\ 0 & Y(\omega) \end{pmatrix}$ pour tout $\omega \in \Omega$.
(i) Déterminer l'évènement "A est diagonalisable" en fonction de X et Y.
(ii) Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

Exercice 5. Soit X une v.a.r de densité $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = ae^{-|x|}$ pour $x \in \mathbf{R}$.
(i) Déterminer a.
(ii) Calculer la fonction de répartition F_X de X.
(iii) Montrer que $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(X)$ existent et les calculer.

Exercice 6. Soit a est un nombre réel et X une variable aléatoire de densité
$$x \mapsto f(x) = axe^{-x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x),$$
(i) Déterminer a.
(ii) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(X \in \{0,1\})$, $\mathbf{P}(X \leq 0)$ et $\mathbf{P}(-2 < X < 2)$.
(iii) Calculer l'espérance de X.
(iv)Soit $Y = 1/X$. Déterminer la fonction de répartition ainsi que la densité de Y.

Exercice 7. Soit a est un nombre réel et X une variable aléatoire continue de densité f, définie par $f(x) = \dfrac{a}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in [0,1[$ et $f(x) = 0$ sinon.
(i) Déterminer a.
(ii) Montrer que X possède une espérance et la calculer.
(iii) Soit $Y = \arcsin(X)$. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.

Exercice 8. Soit a est un nombre réel et X une variable aléatoire continue de densité f définie par $f(x) = \dfrac{a}{1+x^2}$ pour $x \in \mathbf{R}$.
(i) Déterminer a.
(ii) Calculer la fonction de répartition F_X de X.
(iii) Montrer que X ne possède pas d'espérance.

Exercice 9. On dit qu'une v.a.r X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est sans mémoire si $\mathbf{P}(X > s) > 0$ et $\mathbf{P}(X > t + s | X > s) = \mathbf{P}(X > t)$ pour tous $t, s \geq 0$.
(i) Soit X une v.a.r de loi exponentielle. Montrer que X est sans mémoire.
(ii) **(*)** Soit X une v.a.r X à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, à densité et sans mémoire. Montrer que X suit une loi exponentielle. (Indication : on pourra considérer la fonction continue h définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = \log(\mathbf{P}(X > x))$.)