Université de Rennes 1–Année 2021/2022

L3—PSIN/PRB–Feuille de TD 7

Dans la suite, on dira qu'une fonction $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définit une densité de probabilité si $f \geq 0$, si f est continue sauf en au plus un nombre fini de points et si $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ existe et est égale à 1.

Exercice 1. Soit X une v.a.r suivant la loi uniforme sur $[-1, 1]$. Montrer que $Y = X^2$ suit une loi continue dont on déterminera la densité.

Exercice 2. Soit X une v.a.r de densité $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $t \mapsto e^{-|t|}/2$.
(i) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.
(ii) Calculer la fonction de répartition F_X de X.
(iii) Montrer que $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$ existent et les calculer.

Exercice 3. (i) Soit $a > 0$. Déterminer b en fonction de a pour que

$$x \mapsto f(x) = \frac{b}{x+a}\mathbf{1}_{[0,e-1]}(x)$$

soit une densité de probabilité.

On suppose dans toute la suite que $a = b = 1$.
Soit X une variable aléatoire continue de densité f.
(ii) Calculer les probabilités $\mathbf{P}(X = 1)$ et $\mathbf{P}(0 < X < 2)$ et $\mathbf{P}(X > 3)$. *(A toute fin utile, on signale que $e \approx 2,718$).*
(iii) Calculer l'espérance de X.
(iv) Soit $Y = X^2$. Calculer la fonction de répartition de Y. En déduire que Y est une v.a.r à densité et calculer la densité de Y.

Exercice 4. Soit $\alpha \in]2, +\infty[$ un paramètre réel fixé dans toute la suite.
Soit X une v.a.r continue de densité f donnée par $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{t^{\alpha+1}} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1. \end{cases}$
(i) Montrer que f est bien une densité de probabilité.
(ii) Quelle est la probabilité de l'évènement $\{X \leq 0\}$?
(iii) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
(iv) Soit $x > 1$. Calculer $\mathbf{P}(X > x)$.
(v) Soit $a > 0$ fixé. Pour tout $x > 0$, on pose

$$\varphi(x) = \mathbf{P}(X > x + a | X > x).$$

Calculer $\varphi(x)$ et montrer que $x \mapsto \varphi(x)$ est une fonction croissante sur $]0, +\infty[$.
(vi) Interpréter (de manière succinte) le résultat (v) quand X représente la fortune d'un individu.
(vii) Soit $Y = \ln_+(X)$, où $\ln_+(x)$ est définie par $\ln_+(x) = \ln x$ si $x > 0$ et $\ln_+(x) = 0$ sinon. Déterminer la fonction de répartition de Y et reconnaitre sa loi.

Exercice 5. Soit X une v.a.r suivant la loi uniforme sur $[0, \pi]$. Montrer que $Y = \cos(X)$ suit une loi continue dont on déterminera la densité.

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire continue de densité $f : x \mapsto \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.
(i) Montrer que f définit une densité de probabilité.
(ii) Calculer la fonction de répartition F_X de X.
(iii) Montrer que X ne possède pas d'espérance.

Exercice 7. Soit X v.a.r continue de loi uniforme sur $[-1, 1]$. Déterminer la loi de $Y = f(X)$ pour $f :]-1, 1[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}\log(\frac{1+x}{1-x})$.

Exercice 8. Soit X une v.a.r suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et soit $Y = X^2$.
(i) Déterminer une densité g de Y.
(ii) Calculer, en justifiant leur existence, $\mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$.

Exercice 9. Soit X une v.a.r suivant une loi exponentielle de paramère λ. Déterminer la loi de la partie entière $[X]$ de X.

Exercice 10. On dit qu'une v.a.r X sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ est sans mémoire si $\mathbf{P}(X > s) > 0$ et $\mathbf{P}(X > t + s | X > s) = \mathbf{P}(X > t)$ pour tous $t, s \geq 0$.
(i) Soit X une v.a.r de loi exponentielle. Montrer que X est sans mémoire.
(ii) **(*)** Soit X une v.a.r X à valeurs dans $\mathbf{R}_+^*$, à densité et sans mémoire. Montrer que X suit une loi exponentielle. (Indication : on pourra considérer la fonction continue h définie sur $\mathbf{R}$ par $h(x) = \log(\mathbf{P}(X > x))$.)