Université de Rennes 1–Année 2022/2023

L3—PRB/PSI1–Feuille de TD 6

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et soit $A \in \mathbf{F}$. Soit $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A. Montrer que $\mathbf{1}_A$ est une v.a.r. sur Ω et calculer son espérance. Quelle est la loi de $\mathbf{1}_A$?

Exercice 2. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 3. Soit X un v.a.r suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Soit $\lambda \geq 0$. Montrer que la v.a.r. $e^{-\lambda X}$ possède une espérance et la calculer.

Exercice 4. Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et suivant toutes deux une même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer la loi de la v.a.r $Z = X + Y$.

Exercice 5. Soient X et Y deux v.a.r indépendantes sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ et suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Déterminer la loi de la v.a.r $Z = X + Y$.

Exercice 6. On suppose que le nombre N d'enfants dans une famille suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On suppose que les naissances sont indépendantes les unes des autres et qu'à chaque naissance, la probabilité que l'enfant soit une fille est $p \in]0,1[$. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de filles dans la famille.
(i) Calculer $\mathbf{P}(N = n)$ pour $n \in \mathbf{N}$?
(ii) Calculer $\mathbf{P}(X = k | N = n)$ pour des entiers naturels k et n.
(iii) Déterminer la loi de X et la reconnaître ; en déduire $\mathbb{E}(X)$.

Exercice 7. Soient X et Y deux v. a. r indépendantes suivant toutes les deux une loi de Bernoulli de paramètre p. On considère les v.a.r. $S = X + Y$ et $D = X - Y$.
(i) Déterminer les loi de S et D ainsi que leurs espérances et variances.
(ii) Calculer $\mathbf{E}[SD]$.
(iii) Les variables S et D sont-elles indépendantes ?

Exercice 8. Soient a, b deux nombres réels avec $a \neq b, a \neq -b$ et $a, b \notin \{0, \pm 1\}$; soit X une v. a. r. de loi uniforme sur $\{-a, a, b, -b\}$ et $Y = X^2$.
(i) Calculer les variances de X, Y et $X + Y$ respectivement.
(ii) Les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?