Université de Rennes 1

Année 2022/2023

L3—PRB/PSI1

Feuille de TD 5

Exercice 1. Vous jouez au jeu suivant : vous lancez un dé équilibré ; si vous obtenez $1, 2$ ou 3, vous gagnez la somme égale au nombre obtenu en euros ; sinon, vous perdez 2 euros. Soit X la v.a.r correspondant à votre gain.
(i) Déterminer la loi de X; calculer l'espérance et la variance de X.
(ii) Calculer l'espérance de la v.a.r $Y = \cos(\frac{\pi}{2}X)$.

Exercice 2. Soit X une v.a.r prenant les valeurs 2, 4, 6, ou 8.
(i) Déterminer la loi de X sachant que $\mathbf{P}(X < 6) = \frac{1}{3}, \mathbf{P}(X > 6) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(X = 4)$.
(ii) Quelle est la loi de $|X - 6|$?

Exercice 3. On lance un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le numéro obtenu. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.
(i) Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance et sa variance.
(ii) Quelle est la loi de $1/X$ et son espérance ?

Exercice 4. Un station service fait chaque semaine le plein de son réservoir. Une analyse statistique montre que la demande hebdomadaire des clients, en milliers de litres, est bien approchée par une v.a.r. discrète D dont la loi est donnée par $\mathbf{P}(D = k) = (1 - p)^{k-1}p$ pour tout $k \geqslant 1$, avec $p = 9/10$.

Quel doit être la contenance du réservoir de la station pour garantir que la probabilité d'être à court d'essence soit inférieure à 10^{-5} ?

Exercice 5. Soit X une v.a.r dont l'ensemble des valeurs est $\mathbf{Z}^*$ et dont la loi donnée par $\mathbf{P}(X = k) = 2^{-|k|-1}$ pour tout $k \in \mathbf{Z}^*$.
(i) Déterminer la loi de la v.a.r $Y = |X|$.
(ii) Déterminer la loi de la v.a.r $Z = 2 + \pi \cos(\pi X)$.

Exercice 6. (*) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que X admet une espérance si, et seulement si, la série de terme général $\mathbf{P}(X > n)$ converge et que, dans ce cas, on a $\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > n)$.
(Indication : Ecrire $\mathbf{P}(X > n)$ sous forme de série infinie.)

Exercice 7. (*) Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de v.a.r. sur Ω. Soit N une v.a.r sur Ω à valeurs dans $\mathbf{N}$. On définit $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ par $Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$. Montrer que Y est une v.a.r. sur Ω.

Exercice 8. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Calculer $\mathbf{E}(1/X)$.