Université de Rennes 1

Année 2021/2021

L3—PRB/PSI1
Feuille de TD 5

Exercice 1. Une urne contient 5 boules numérotées, dont 3 sont blanches et 2 noires. Un joueur tire successivement, avec remise, 3 boules dans cette urne.

(1) Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ modélisant cette expérience aléatoire.

Pour chaque boule blanche tirée, le joueur gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points. Soit X le nombre de boules blanches tirées et Y le nombre de points obtenus.

(2) Identifier la loi de X ; calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{Var}(X)$.

(3) Exprimer Y en fonction de X; calculer $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{Var}(Y)$.

Exercice 2. Soit X une v.a.r prenant les valeurs 2, 4, 6, ou 8.

(i) Déterminer la loi de X sachant que

$$\mathbf{P}(X < 6) = \frac{1}{3}, \mathbf{P}(X > 6) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(X = 2) = \mathbf{P}(X = 4).$$

(ii) Quelle est la loi de $|X - 6|$?

Exercice 3. Un urne contient des boules numérotées : 7 boules sont marquées du chiffre 1, 5 boules du chiffre 3, et 3 boules du chiffre 5. On tire une boule au hasard et l'on appelle X sa marque.

(i) Quelle est la loi de X ?

(ii) Calculer est son l'espérance et la variance de X.

(ii) Que vaut $\mathbf{E}(|X - 2|)$?

Exercice 4. Soit X un v.a.r d'espérance 3 et de variance 2. Calculer $\mathbf{E}(Y)$ pour $Y = (X - 2)^2$.

Exercice 5. On lance un dé truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X le numéro obtenu. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

(i) Quelle est la loi de X ? Calculer son espérance et sa variance.

(ii) Quelle est la loi de $1/X$ et son espérance ?

Exercice 6. Un station service fait chaque semaine le plein de son réservoir. Une analyse statistique montre que la demande hebdomadaire des clients, en milliers de litres, est bien approchée par une v.a.r. discrète D dont la loi est donnée par $\mathbf{P}(D = k) = (1 - p)^{k-1}p$ pour tout $k \geqslant 1$, avec $p = 9/10$.

Quel doit être la contenance du réservoir de la station pour garantir que la probabilité d'être à court d'essence soit inférieure à 10^{-5} ?

Exercice 7. Soit X une v.a.r dont l'ensemble des valeurs est $\mathbf{Z}^*$ et dont la loi donnée par $\mathbf{P}(X = k) = 2^{-|k|-1}$ pour tout $k \in \mathbf{Z}^*$.

(i) Déterminer la loi de la v.a.r $Y = |X|$.

(ii) Déterminer la loi de la v.a.r $Z = 2 + \pi\cos(\pi X)$.

Exercice 8. **(*)** Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que X admet une espérance si, et seulement si, la série de terme général $\mathbf{P}(X > n)$ converge et que, dans ce cas, on a

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X > n).$$

(Indication : Ecrire $\mathbf{P}(X > n)$ sous forme de série infinie.)

Exercice 9. **(*)** Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de v.a.r. sur Ω. Soit N une v.a.r sur Ω à valeurs dans $\mathbf{N}$. On définit $Y : \Omega \to \mathbf{R}$ par

$$Y(\omega) = X_{N(\omega)}(\omega) \qquad \text{pour tout} \quad \omega \in \Omega.$$

Montrer que Y est une v.a.r. sur Ω.

Exercice 10. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Déterminer la probabilité que la valeur de X soit paire

Exercice 11. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$.

Exercice 12. Soit X une v.a.r sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{X+1}\right)$.