Université de Rennes 1–Année 2021/2022

L3—PRB-PSIN1—Feuille de TD 2

Exercice 1. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et A, B, C des évènements dans $\mathcal{F}$. Exprimer les évènements suivants en fonction de A, B, C, A^c, B^c, C^c :

(i) Aucun des évènements A, B ou C n'est réalisé.

(ii) Un seul des évènements A, B ou C est réalisé.

(iii) Au moins deux des évènements A, B ou C sont réalisés.

On suppose que $\mathbf{P}(A) = 1/3$ et $\mathbf{P}(B) = 1/2$. Calculer $\mathbf{P}(A \cup B)$ dans chacun des cas suivants :

(iv) les évènements A et B sont incompatibles ;

(v) l'évènement A implique l'évènement B ;

(vi) $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/6$.

Exercice 2. Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et $(A_1, A_2, A_3) \in \mathcal{F}^3$. Exprimer les évènements suivants en fonction des évènements A_i et leurs probabilités en fonction des probabilités

$p_i = \mathbf{P}(A_i)$, $p_{ij} = \mathbf{P}(A_i \cap A_j)$, $p_{123} = \mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ pour tout $i \neq j$:

1) les trois évènements se réalisent ; 2) au moins l'un des évènements se réalise ; 3) au moins deux des évènements se réalisent ; 4) A_1 seul se réalise ; 5) A_1 et A_2 se réalisent mais pas A_3 ; 6) deux évènements au plus se réalisent ; 6) aucun des trois évènements ne se réalise.

Indication : on pourra utiliser la formule

$$\mathbf{P}(A \cup B \cup C) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(B \cap C) + \mathbf{P}(A \cap B \cap C).$$

Exercice 3. (*) Soient Ω_1, Ω_2 deux ensembles et $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ une application.

(i) **(Tribu image réciproque)** Soit $\mathcal{F}_2$ une tribu sur Ω_2. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{F}_2) := \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{F}_2\}$ est une tribu sur Ω_1.

(ii) **(Tribu image)** Soit $\mathcal{F}_1$ une tribu sur Ω_1. Montrer que $f(\mathcal{F}_1) := \{B \in \mathcal{P}(\Omega_2) \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1\}$ est une tribu sur Ω_2.

(iii) Soit $\mathcal{F}_1$ une tribu sur Ω_1 et $\mathbf{P}_1$ une mesure de probabilité sur $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$. On définit $\mathbf{P}_2 : f(\mathcal{F}_1) \to \mathbf{R}$ par $\mathbf{P}_2(B) = \mathbf{P}_1(f^{-1}(B))$, pour tout $B \in f(\mathcal{F}_1)$. Montrer que $\mathbf{P}_2$ est une mesure de probabilité sur $(\Omega_2, f(\mathcal{F}_1))$.

Exercice 4. (Limites supérieure et inférieure d'évènements) (*) Soit $\mathcal{F}$ une tribu sur un ensemble Ω et $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite infinie d'évènements dans $\mathcal{F}$. La *limite inférieure* $\liminf A_n$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à tous les A_n, à partir d'un certain rang. La *limite supérieure* $\limsup A_n$ est l'ensemble des $\omega \in \Omega$ qui appartiennent à A_n pour une infinité de $n \in \mathbf{N}$.

(i) Montrer que

$$\liminf A_n = \bigcup_{N\in\mathbf{N}} \bigcap_{n\geq N} A_n \qquad \text{et} \qquad \limsup A_n = \bigcap_{N\in\mathbf{N}} \bigcup_{n\geq N} A_n.$$

et en déduire que $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$ appartiennent à $\mathcal{F}$.
(ii) Montrer que $(\limsup A_n)^c = \liminf(A_n^c)$.
(iii) Soient A, B deux parties appartenant à $\mathcal{F}$. On définit $A_{2n} = A$ et $A_{2n+1} = B$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Déterminer $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$. (iv) Soit $\mathbf{P}$ une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite dans $\mathcal{F}$. Montrer que

$$\mathbf{P}(\liminf A_n) \leq \liminf \mathbf{P}(A_n) \quad \text{et} \quad \limsup \mathbf{P}(A_n) \leq \mathbf{P}(\limsup A_n).$$

(v) Donner un exemple où les inégalités précédentes sont strictes.

Exercice 5. Un QCM comporte 10 questions, pour chacune desquelles 4 réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Une personne décide d'y répondre au hasard. Proposer un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ qui modélise cette expérience aléatoire. Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins 6 réponses correctes ?

Exercice 6. Au loto, on tire six numéros entre 1 et 49, deux-à-deux distincts et sans tenir compte de leur ordre. Proposer un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ pour cette expérience aléatoire.

Calculez les probabilités des évènements suivants, pour $0 \leq k \leq 6$:
— «Avoir exactement k bons numéros » ;
— « Avoir zéro, un ou deux bons numéros» ;
— « Avoir au moins trois bons numéros ».

Exercice 7. Vingt chevaux sont au départ d'une course et un parieur choisit au hasard son tiercé. Proposer un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ pour cette expérience aléatoire.

Quelle est la probabilité d'obtenir le tiercé gagnant dans l'ordre ? Quelle est celle pour le tiercé dans le désordre ?

Exercice 8. (i) Combien de fois faut-il lancer un dé équilibré pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un « six » ?
(ii) Même question avec deux dés pour obtenir un « double-six ».
(iii) Lequel des deux évènements suivant est le plus probable : « obtenir au moins un « six » en lançant 4 fois un dé » ou bien « obtenir au moins un « double-six » en lançant 24 fois une paire de dés » ?