Université de Rennes 1–Année 2022/2023
L3—PSIN/PRB–Feuille de TD 12-Correction

Exercice 1. On lance un dé à 6 faces 4 fois de suite, de manière indépendante.
(i) Décrire un espace probabilisé modélisant cette expérience aléatoire.
Solution : *L'univers est* $\Omega = \{1, \ldots, 6\}^4$, *avec la mesure de probabilité uniforme* $\mathbf{P}$ *définie sur* $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ *par* $\mathbf{P}(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$ *pour tout* $A \subset \Omega$.
(ii) Quelle est la probabilité que deux nombres distincts apparaissent, chacun deux fois, lors de ces 4 lancers ?
Solution : *Soit* A *l'événement "deux nombres distincts apparaissent, chacun deux fois". Il y a* $\binom{6}{2}$ *choix possibles pour les deux nombres qui apparaissent dans* A; *pour chacun de ces choix, il y a* $\binom{4}{2}$ *choix possibles de leur positions. D'où* $\mathbf{P}(A) = \frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}}{6^4} = \frac{5}{72}$.

Exercice 2. On dispose de 2 urnes U_1 et U_2 contenant 100 boules en tout. L'urne U_1 contient 40 boules dont 8 sont blanches et 32 noires ; l'urne U_2 contient 60 boules dont 6 sont blanches et 54 noires. On choisit au hasard une urne et on en tire une boule. Soient A_i l'évènement "l'urne choisie est U_i" pour $i = 1, 2$ et A l'événement "la boule est blanche".

(i) Calculer $\mathbf{P}(A|A_1), \mathbf{P}(A|A_2)$ et $\mathbf{P}(A)$.
Solution : *On a* $\mathbf{P}(A|A_1) = \frac{8}{40} = \frac{2}{10}$ *et* $\mathbf{P}(A|A_2) = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$. *De plus,* $\mathbf{P}(A_1) = \mathbf{P}(A_2) = 1/2$. *D'où* $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A|A_1)\mathbf{P}(A_1) + \mathbf{P}(A|A_2)\mathbf{P}(A_2) = \frac{3}{20}$.
(ii) On constate qu'on a tiré une boule blanche. Qu'elle est la probabilité qu'elle provient de l'urne U_2.
Solution : *La probabilité cherchée est* $\mathbf{P}(A_2|A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap A_2)}{\mathbf{P}(A)} = \frac{\mathbf{P}(A|A_2)\mathbf{P}(A_2)}{\mathbf{P}(A)} = 1/3$.

Exercice 3. On considère une urne contenant 5 boules, dont 3 sont blanches et 2 noires. On tire de l'urne successivement deux boules **sans remise**. Soient X_1 (respectivement X_2) la v.a.r égale à 1 si la 1e (respectivement la 2e) boule est blanche et 0 sinon.
(i) Déterminer la loi conjointe de (X_1, X_2) ainsi que la loi de X_1 et la loi de X_2 et présenter le résultat sous forme de tableau.
Solution : *On a* $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $\mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, $\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$ *et* $\mathbf{P}(X_1 = 0, X_2 =$

$0) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$, *et on obtient le tableau suivant*

X_2/X_1	1	0	P_{X_2}
1	3/10	3/10	6/10
0	3/10	1/10	4/10
P_{X_1}	6/10	4/10	1

(ii) Calculer $\mathbb{E}(X_1X_2)$ et la covariance $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
Solution : *On a* $\mathbb{E}(X_1X_2) = 1 \times \mathbf{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = 3/10$; *d'autre part,* $\mathbb{E}(X_1) = 1\times\mathbf{P}(X_1 = 1) = 6/10$ *et* $\mathbb{E}(X_2) = 1\times\mathbf{P}(X_2 = 1) = 6/10$. *D'où* $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = -3/50$.

Exercice 4. Soit X v.a.r continue de loi sur $[-1, 1]$. Déterminer la loi de $Y = f(X)$ pour $f :]-1, 1[\to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{2}\log(\frac{1+x}{1-x})$.
Solution : *f est bijective, d'inverse $f^{-1} : \mathbf{R} \to]-1, 1[$ donnée par* $f^{-1}(y) = \dfrac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$. *Soit $y \in \mathbf{R}$. On a, pour la fonction de répartition F_Y de Y :*

$$F_Y(y) = \mathbf{P}(f(X) \leq y) = \mathbf{P}(X \leq f^{-1}(y)) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{f^{-1}(y)} dx = \frac{1}{2}(\frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}+1).$$

On obtient la densité g de Y en dérivant F_Y : $g(y) = \dfrac{2e^{2y}}{(e^{2y}+1)^2}$ *pour tout $y \in \mathbf{R}$.*

Exercice 5. Un livre de 100 pages contient 1000 erreurs, réparties aux hasard selon les pages. On ouvre le livre et on compte le nombre X d'erreurs contenues dans une page.
(i) Identifier la loi de X. Quelle est l'espérance de X? Quelle est sa variance ?

Solution : *On peut s'imaginer qu'on a 100 urnes (correspondant aux 100 pages) et 1000 boules (correspondant aux 1000 erreurs). On place alors au hasard chacune des boules, l'une après l'autre, dans une des urnes. On fixe une urne (c-à-d une page). A chaque placement d'une boule, la probabilité que cette urne reçoive cette boule est 1/100. Comme il y a 1000 boules, on a donc affaire à 1000 expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre 1/100 chacune. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n = 1000$ et $p = 1/100$. On a*

$$\mathbf{E}(X) = np = 1000 \times (1/100) = 10$$

et

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = 1000 \times (1/100) \times (99/100) = 9.9.$$

(ii) Donner une majoration de $\mathbf{P}(X > 20)$ au moyen l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Solution : *Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a*

$$\mathbf{P}(|X - 10| \geq 10) = \mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geq 10) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{10^2} = 0.099.$$

Comme $\{X > 20\} \subset \{|X - 10| \geq 10\}$, *il s'ensuit que* $\mathbf{P}(X > 20) \leq 0.099$.

(iii) En approchant la loi de X par une loi de Poisson, essayer de donner une valeur approchée de la probabilité $\mathbf{P}(X > 20)$.

Solution : *On approche la loi de* X *par une loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$ *avec* $\lambda = np = 1000 \times 1/100 = 10$. *Alors*

$$\mathbf{P}(X > 20) \approx e^{-\lambda} \sum_{k=21}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-10} \sum_{k=21}^{+\infty} \frac{10^k}{k!} \approx 2 \times 10^{-3}.$$

(iv) En approchant la loi de X par une loi normale, donner une valeur approchée de la probabilité $\mathbf{P}(X > 20)$.

Solution : *Soit*

$$Z = \frac{X - np}{\sqrt{npq}} = \frac{X - 10}{\sqrt{9.9}}.$$

Alors (voir Cours) Z *suit approximativement une loi normale centrée-réduite* $\mathcal{N}(0,1)$. *On a alors*

$$\mathbf{P}(X > 20) = \mathbf{P}\left(\frac{X - 10}{\sqrt{9.9}} > \frac{10}{\sqrt{9.9}}\right) = \mathbf{P}\left(Z > \frac{10}{\sqrt{9.9}}\right) \approx \mathbf{P}(Z > 3) = 1 - \Pi(3).$$

On trouve dans la table de la loi normale que $\Pi(3) = 0.9987$. *D'où* $\mathbf{P}(X > 20) \approx 1 - 0.9987 = 0.0013$.

Exercice 6. Pour $a > 0$, soit X une variable aléatoire continue de densité f, donnée par $f(x) = axe^{-\frac{x^2}{2}} \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)$ pour $x \in \mathbf{R}$.
(i) Déterminer a.
Solution : *On doit avoir* $1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a \int_0^{+\infty} xe^{-x^2/2}dx = a[e^{-\frac{x^2}{2}}]_0^{+\infty} = a$; *d'où* $\boxed{a = 1}$.
(ii) Soit $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y et la reconnaître.
Solution : *Pour tout* $y \in \mathbf{R}$, *on a* $F_Y(y) = \mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(X^2 \leq y)$. *Pour* $y < 0$, *on a donc* $F_Y(y) = 0$; *pour* $y \geq 0$, *on a, avec le changement de variable* $u = x^2$: $F_Y(y) = \mathbf{P}(X \leq \sqrt{y}) = \int_0^{\sqrt{y}} xe^{-x^2/2}dx = \frac{1}{2}\int_0^y e^{-u/2}du$. *Ceci montre que* $Y \sim \mathcal{E}(1/2)$.

(iii) Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.
Solution : *Avec une IPP, on a* $\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2} dx = [xe^{-x^2/2}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = 0 + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\pi/2}$. *De plus,* $\mathbb{E}(X^2) = \mathbb{E}(Y) = 2$, *car* $Y \sim \mathcal{E}(1/2)$. *D'où* $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Exercice 7. Pour $a \in \mathbf{R}$, soit (X, Y) un couple aléatoire de densité f définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} a(x^4 + y^4) & \text{si } (x,y) \in [-1,1] \times [0,1] \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

(i) Déterminer a.
Solution : *On doit avoir*

$$\begin{aligned} 1 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy &= a\int_0^1 \left(\int_{-1}^1 (x^4 + y^4)dx\right) dy \\ &= a\int_0^1 (2y^4 + 2/5)dy \\ &= a(2/5 + 2/5) = 4a/5. \end{aligned}$$

et donc $\boxed{a = 5/4.}$
(ii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y.
Solution : *Pour* $x \in \mathbf{R}$, *on a*

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy$$

et donc $f_X(x) = 0$ *pour* $x \notin [-1,1]$ *car* $f(x,y) = 0$ *pour* $x \notin [-1,1]$ *; soit* $x \in [-1,1]$, *alors* $f_X(x) = a\int_0^1 (x^4 + y^4)dy = a(x^4 + \dfrac{1}{5})$. *En conclusion, pour tout* $x \in \mathbf{R}$, *on a*

$$f_X(x) = \frac{5}{4}(x^4 + \frac{1}{5})\mathbf{1}_{[-1,1]}(x).$$

De même, on a $f_Y(y) = 0$ *pour* $y \notin [0,1]$. *Pour* $y \in [0,1]$ *on a* $f_Y(y) = a\int_{-1}^1 (x^4 + y^4)dx = a(2y^4 + \dfrac{2}{5})$. *En conclusion, pour tout* $y \in \mathbf{R}$, *on a*

$$f_Y(y) = \frac{5}{4}(2y^4 + \frac{2}{5})\mathbf{1}_{[0,1]}(y).$$

(iii) X et Y sont-elles indépendantes ?
Solution : *Non,* X *et* Y *ne sont pas indépendantes ; en effet, supposons par l'absurde que* X *et* Y *sont indépendantes. On a alors (voir Cours)*

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 : \qquad f(x,y) = f_X(x) f_Y(y).$$

On a, en particulier, pour tous $x \in [-1,1]$ *et* $y \in [0,1]$, $x^4 + y^4 = (x^4+\frac{1}{5})(2y^4+\frac{2}{5})$. *Ceci est absurde (en prenant* $x = y = 0$, *par exemple, on aurait* $0 = 2/25$*).*

(iv) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X,Y)$.

Solution : *On a* $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}(x^5 + \frac{x}{5})dx = 0$ *ainsi* $\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy = \frac{5}{4}\int_0^1(2y^5 + \frac{2y}{5})dy = 0$ *et*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x,y)dx \\ &= \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1}(x^5y + y^5x)dydx \\ &= \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}(\frac{x^5}{2} + \frac{x}{6})dx = 0.\end{aligned}$$

D'où $\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = 0$.

(v) Soit $x \in [0,1]$. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X = x)$.

Solution : *Soit* $x \geq 0$. *Alors* $f_X(x) = a(x^4 + \frac{1}{5}) > 0$ *et la densité conditionnelle de* Y *sachant* $X = x$ *est* $f_{Y|X=x}(y) = \frac{f(x,y)}{f_X(x)}$ *pour tout* $y \in \mathbf{R}$. *On a donc*

$$f_{Y|X=x}(y) = \begin{cases} \dfrac{a(x^4+y^4)}{a(x^4+\frac{1}{5})} = \dfrac{x^4+y^4}{x^4+\frac{1}{5}} & si \;\; y \in [0,1] \\ 0 & si \; y \notin [0,1]. \end{cases}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y|X=x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_{Y|X=x}(y)dy \\ &= \frac{1}{x^4+\frac{1}{5}}\int_0^1(yx^4 + y^5)dy \\ &= \frac{1}{x^4+\frac{1}{5}}(\frac{x^4}{2} + \frac{1}{6})\end{aligned}$$

$$= \frac{15x^4+5}{30x^4+6}.$$

(vi) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbb{E}(Y|X)$ de Y sachant X.

Solution : *Comme* $\mathbb{E}(Y|X = x) = \dfrac{15x^4+5}{30x^4+6}$ *pour tout* x *tel que* $f_X(x) > 0$, *on a (voir Cours)*

$$\mathbb{E}(Y|X) = \frac{15X^4+5}{30X^4+6}.$$

Exercice 8. On désire évaluer le nombre N de kangourous vivant sur une île. Pour cela, on commence par capturer 800 kangourous que l'on marque et relâche juste après. Après un certain temps, on capture de nouveau 1000 kangourous parmi lesquels on trouve que 250 sont marqués. En déduire un intervalle de confiance pour N au seuil de risque de $\alpha = 5\%$.

Solution : *Soit* $p = \frac{800}{N}$ *la proportion de kangourous marqués. Une estimation de* p *est donnée par* $\widehat{p} = \frac{250}{1000} = 0.25$. *Comme* $\mathbf{P}(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ *pour* $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, *l'intervalle de confiance pour* p *au risque de 5% (voir cours) est donné par*

$$\left[\widehat{p} - 1.96\frac{1}{2\sqrt{1000}}, \widehat{p} + 1.96\frac{1}{2\sqrt{1000}}\right],$$

c-à-d $[0.25 - 0.03, 0.25 + 0.03] = [0.22, 0.28]$.

Une estimation de N *est* $\widehat{N} = \frac{800}{\widehat{p}} = 3200$. *L'intervalle de confiance pour* N *au risque de 5% est donné par*

$$\left[\frac{800}{0.28}, \frac{800}{0.22}\right] = [2857, 3636].$$