Université de Rennes 1
Année 2022/2023

L3—PRB/PSI1
Feuille de TD 10

Exercice 1. On lance une fléchette sur une cible circulaire

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

de rayon 1. On suppose que le point d'impact Z de la fléchette est uniformément distribué sur la cible D. On écrit $Z = (X, Y)$, où X et Y sont les coordonnées cartésiennes du point d'impact.
(i) Quelle est la densité de Z?
(ii) Déterminer les densités marginales f_X et f_Y.

Exercice 2. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes et suivant chacune une loi normale centrée-réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.
(i) Déterminer la densité du couple aléatoire $Z = (X, Y)$.
Soit T la v.a.r définie sur $\{X \neq 0\}$ par $T = Y/X$ et par $T = 0$ sur $\{X = 0\}$.
(ii) $(*)$ Déterminer la fonction de répartition de T. (*Indication :* penser aux coordonnées polaires). Montrer que T possède une densité et la déterminer.

Exercice 3. Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^+$, donnée par

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = a\frac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(x)\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(y),$$

où a est un nombre réel.
(i) Déterminer a.
(ii) Déterminer la densité f_Y de Y.
(iii) X et Y sont-elles indépendantes ?
(iv) Calculer $\mathbf{E}(X)$ au moyen de la formule de transfert

$$\mathbf{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y)dxdy.$$

(v) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

Exercice 4. Soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^+$, définie par

$$(x, y) \mapsto f(x, y) = a(x + y)e^{-x}\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x)\mathbf{1}_{[0,2]}(y),$$

où a est un nombre réel.

(i) Déterminer a.
(ii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y.
(iii) X et Y sont-elles indépendantes ?
(iv) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$.
(v) Soit $x \geq 0$. Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(Y|X = x)$.
(vi) Déterminer l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}(Y|X)$.

Exercice 5. Deux personnes A et B se donnent rendez-vous à un endroit entre 0h et 1h. On suppose que chacune arrive indépendamment de l'autre à un instant aléatoire suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0, 1])$. Soient X et Y les instants d'arrivée de A et de B respectivement.
(i) Quelles sont les lois de X et de Y ? Calculer $\mathrm{Var}(X + Y)$.
(ii) Soit T le temps d'attente de la 1ère personne arrivée. Exprimer T en fonction de X et Y. Calculer $\mathbf{E}(T^2)$.
(iii) Soient U et V les heures d'arrivée successives des deux personnes. Exprimer U et V en fonction de X et Y.
(iv) Déterminer les fonctions de répartition de U et V et en déduire leurs densités.
(v) Calculer $\mathbf{E}(U)$ et $\mathbf{E}(V)$ ainsi que $\mathrm{Var}(U)$ et $\mathrm{Var}(V)$. En déduire $\mathbf{E}(T)$.
(vi) $(*)$ Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(U, V)$. (*Indication :* on remarquera que $U+V = X+Y$ et que $\mathrm{Var}(U+V) = \mathrm{Var}(U)+\mathrm{Var}(V)+2\mathbf{Cov}(U, V)$)

Exercice 6. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant des lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\beta)$, respectivement.
(i) Quelle est la densité du couple aléatoire $Z = (X, Y)$?
(ii) Déterminer la densité f_{X+Y} de la v.a.r. $X + Y$ dans le cas $\lambda \neq \beta$.
(iii) Déterminer la densité f_{X+Y} de la v.a.r. $X + Y$ dans le cas $\lambda = \beta$.