Université de Rennes 1
Année 2022/2023

L3—PSIN/PRB–Feuille de TD 10

Exercice 1. Dans une population, on estime que 1/100 des personnes sont atteintes d'une certaine maladie. On teste 200 personnes prises au hasard.
(i) Quelle est la loi du nombre X de personnes atteintes ?
(ii) Par quelle loi peut-on approcher la loi de X ?
(iii) Quelle est la probabilité pour qu'il y ait plus de 4 personnes atteintes parmi les personnes testées ?

Exercice 2. (*) Soit $(X_n)_{n\geq}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On définit $Y_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ pour $n \geq 1$.
(i) Déterminer la fonction de répartition de Y_n.
(ii) Montrer que $(\frac{1}{\ln n} Y_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers $\frac{1}{\lambda}$.
(iii) On pose $Z_n = Y_n - \frac{\ln n}{\lambda}$. Déterminer la limite de la suite des fonctions de répartition $(F_{Z_n})_{n\geq 1}$.

Exercice 3. Une compagnie aérienne assure une liaison aérienne entre deux villes par un avion de 150 places. Des estimations ont montré que la probabilité pour qu'une personne confirme sa réservation est $p = 0.75$. La compagnie vend n billets avec $n > 150$ ("surbooking"). Soit X le nombre de personnes parmi les n possibles qui confirment leur réservation.
(i) Quelle est la loi exacte de X.
(ii) $(*)$ Soit n le nombre de places que la compagnie peut vendre pour que, au risque de 5%, elle soit sûre que tout le monde puisse monter dans l'avion. Etablir une inégalité que doit satisfaire n ; déterminer ensuite n. (*Indication :* On considérera que $Z = (X - \mathbb{E}(X))/\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$ suit approximativement une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et on se rappelera que $\mathbf{P}(Z \leq 1.645) = 0.95$.).

Exercice 4. Une équipe de surveillance cherche à savoir si les huîtres d'un certain bassin ont été contaminées. Sur un échantillon de 200 huîtres, elle dénombre 32 huîtres atteintes. Déterminer un intervalle de confiance, au risque de 5%, pour la proportion d'huîtres contaminées dans le bassin. (*Indication :* On se rappelera que $\mathbf{P}(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$ si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.)

Exercice 5. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$. Soit $Z = X + Y$. Calculer la loi de Z.

Exercice 6. Pour $a \in \mathbf{R}$, soit (X, Y) un couple aléatoire de densité $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^+$, donnée par $f(x, y) = \begin{cases} a(x + y) & \text{si } (x, y) \in [0, 1]^2 \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$
(i) Calculer a.
(ii) Déterminer les densités f_X et f_Y de X et de Y.
(iii) X et Y sont-elles indépendantes ?
(iv) Calculer la covariance $\mathbf{Cov}(X, Y)$.