Réseaux téléphoniques, graphes et théorie des groupes

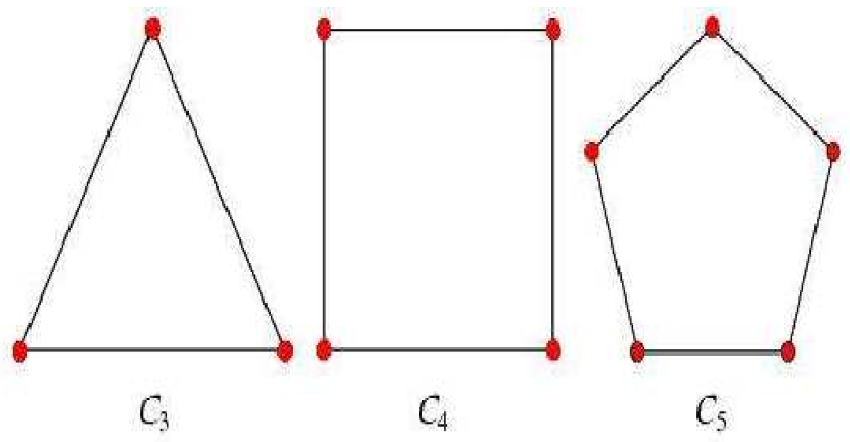
(Partie I: Des graphes magiques)

IRMAR UMR-CNRS 6625
Université Rennes 1

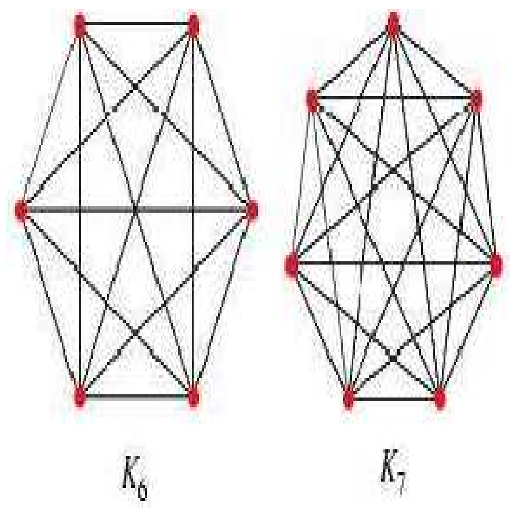
Réseaux et graphes

On cherche à construire un modèle pour un réseau performant. Il peut s'agir d'un réseau téléphonique, d'un réseau informatique, du réseau du Web, du réseau des neurones dans le cerveau, etc. La nature matérielle des objets (centraux téléphoniques, ordinateurs, pages web, neurones,...) ainsi que celle des liaisons (câbles, circuits électroniques, liens hypertextes entre des pages web, synapses,...) entre ces objets n'a - ici ! - aucune importance ; pour chacun des objets, on ne retiendra que la liste de ses "connaissances", c'est-à-dire des objets qui sont liés à lui. L'ensemble de toutes ces données est représenté par un objet mathématique d'une grande simplicité apparente : un **graphe**. Un graphe est constitué de sommets et d'arêtes. Les sommets, représentés par des points, correspondent aux objets à relier; les arêtes, représentées par des traits, correspondent aux liaisons entre les différents objets.

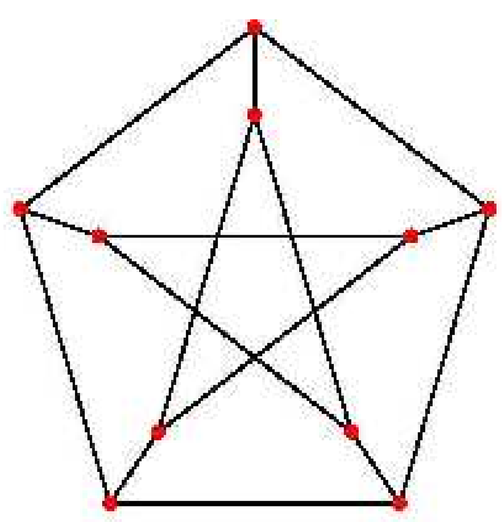
Quelques graphes classiques



Graphes cycliques à 3, 4 et 5 sommets



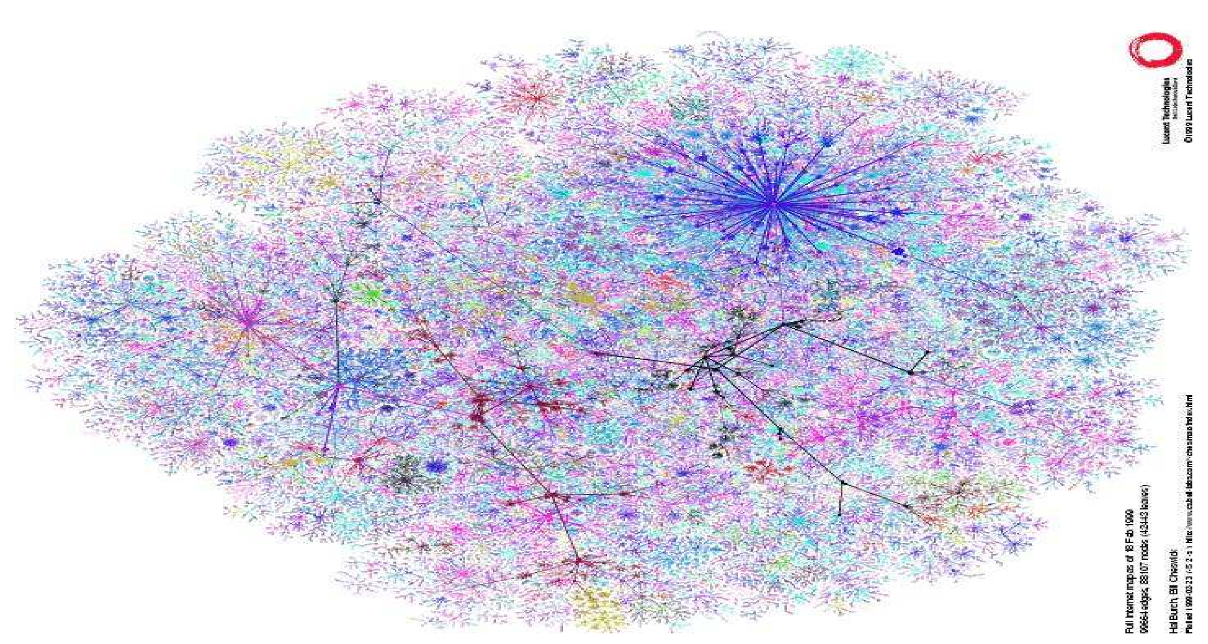
Graphes complets



Graphe de Pedersen

Il est important de souligner que les graphes auxquels nous avons affaire sont de grande taille : l'ordre du nombre de sommets peut aller de 10^6 (quelques millions, comme par exemple pour les réseaux téléphoniques) à 10^9 (quelques milliards, comme c'est le cas pour le nombre de pages web répertoriées par Google).

Pour se faire une idée du graphe du Web



Performance d'un graphe

On exigera d'un "bon" graphe G qu'il possède les deux propriétés suivantes :

- **le graphe doit avoir un taux d'expansion $c > 0$ indépendant de la taille du graphe :** pour chaque ensemble de sommets F, de taille $|F|$ plus petite que la moitié de la taille du graphe G, il y doit y avoir au moins $c|F|$ arêtes qui sortent de F;
- **le degré des sommets doit être borné, indépendamment du graphe :** chaque sommet est relié à au plus k autres sommets, où k est fixé à l'avance.

La première condition exprime une propriété de "connectivité" forte du réseau à modèliser: un ensemble N quelconque d'abonnés ne peut se retrouver isolé du reste du réseau que si un grand nombre de liaisons sont défectueuses (en l'occurence, au moins cN). Cette condition assure également une transmission très rapide de l'information à l'intérieur du réseau: si, par exemple, à l'instant $t = 0$, il y a N abonnés qui détiennent une certaine information, alors à un instant ultérieur t, il y aura $(1 + c)^t N$ personnes qui auront été informées. Typiquement, c est "petit", de l'ordre de 0.1 (un dixième).

Exemple numérique : Pour $c = 1/10$, et $N = 10$ on a :

$$(1 + c)^t N \approx 137800 \text{ pour } t = 100$$

$$(1 + c)^t N \text{ est de l'ordre de 2 milliards pour } t = 200.$$

La deuxième condition limite considérablement le coût du réseau: si N est le nombre d'abonnés, le nombre de lignes requises croît linéairement avec N (en l'occurence, il est égal à au plus kN). Typiquement, k est de l'ordre de quelques unités, entre 5 et 10.

Graphes magiques

Notre objectif est de construire de très grands graphes, avec de plus en plus de sommets, satisfaisant aux deux conditions précédentes. Ces conditions sont en apparence contradictoires : les graphes doivent possèder une même constante d'expansion c (et avoir donc un grand d'arêtes) et admettre une même limitation k sur le nombre d'arêtes partant d'un sommet (et avoir donc un petit nombre d'arêtes).
Ces graphes sont communément appelés graphes extenseurs ; nous les appellerons tout simplement les **graphes magiques**. Le seul problème est qu'il n'est pas du tout clair qu'ils existent.

Construction de graphes magiques

L'existence de tels graphes a été démontrée par l'informaticien Pinsker au début des années 70, par des arguments probablistes : on dessine un grand nombre de points sur une feuille et on tire au hasard des traits entre ces points, avec la contrainte qu'à partir d'un point on ne doit pas mener plus de $k = 5$ traits, par exemple ; pour 1000 points, on a alors plus de 50% de chances d'obtenir un graphe avec une constante d'expansion $c = 1/2$.

La première construction explicite de tels graphes est due au mathématicien Margulis en 1973. Depuis, cette construction a été améliorée et précisée. De même, des graphes "supermagiques", avec des propriétés plus extraordinaires encore, ont été découverts (graphes de Ramanujan).

La construction de Margulis nécessite l'utilisation d'outils mathématiques extrêmement élaborés: elle fait appel à la théorie des groupes, plus précisément, à la théorie de leurs représentations dans des groupes de matrices unitaires, sujet qui peut être considéré comme une généralisation au cadre non commutatif de l'analyse de Fourier classique. A l'exception d'une construction récente ("produits zigzags" de Reingold, Vadhan et Wigderson), toutes les constructions de graphes magiques sont basées sur de tels outils, faisant même intervenir parfois d'autres domaines comme la théorie des nombres (c'est le cas pour les graphes de Ramanujan).

Bachir Bekka