Nom : ____________________
Prénom :____________________
Année 2008/2009, rappels de Probabilités-Statistiques
Master : ____________________

Durée 40 min, sans document(s), sans calculatrice.

Ci-joint, 40 affirmations sur 3 pages. Pour chacune d'entre elles, si vous pensez qu'elle est juste, entourez le **VRAI**, et si vous pensez qu'elle est fausse, entourez le **FAUX**. Une affirmation est soit vraie, soit fausse. Une affirmation vraie "*dans certains cas*" (non spécifiés dans l'énoncé) est considérée comme fausse. Merci d'éviter les ratures.

En ce qui concertne la notation,

- Bonne réponse: $+1/2$ point
- Mauvaise réponse: -1/2 point
- Pas de réponse: 0 point

Remarque 1 Les questions ne suivent pas d'ordre précis, hormis les questions 29/30, 31/32/33, 34/35/36 et 37/38/39 (qui sont sur les mêmes exemples).

Remarque 2 Les questions posées ne nécéssitent pas de calculs compliqués. Encore une fois, il s'agit simplement de dire si l'affirmation est vraie ou fausse.

Dans les questions suivantes, la loi exponentielle de paramètre λ admet pour fonction de répartition $1 - \exp(-\lambda x)$ sur $[0, \infty[$ pour $\lambda > 0$. On rappelle que le quantile à 97.5% de la loi de Student à 35 degrés de liberté est 2.030108 (que l'on pourra arrondir à 2).

1. **VRAI** **FAUX** En répondant "totalement" au hasard à ce QCM ($\mathbb{P}$(répondre **FAUX**) $=$ $\mathbb{P}$(répondre **VRAI**) $= 1/2$, de manière indépendante entre les questions), vous pouvez espérer avoir la moyenne (10/20).
2. **VRAI** **FAUX** Si X est une variable aléatoire strictement positive, $\mathbb{E}(1/X) = 1/\mathbb{E}(X)$.
3. **VRAI** **FAUX** La corrélation est toujours comprise entre -1 et $+1$.
4. **VRAI** **FAUX** Si $cov(X, Y) = 0$ alors X et Y sont indépendants.
5. **VRAI** **FAUX** Si X et Y sont deux variables aléatoires positives, $Cov(X, Y) \geq 0$.
6. **VRAI** **FAUX** Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs 0 et -1 avec probabilité $1 - p$ et p respectivement, où $0 < p < 1$. Alors $\mathbb{E}(X) = -p$ et $Var(X) = -p(1 - p)$.
7. **VRAI** **FAUX** Soient X et Y deux variables de densité f_X et f_Y, alors la densitée de $X + Y$ n'est jamais $f_X + f_Y$.
8. **VRAI** **FAUX** Soit f la densité d'une variable aléatoire continue, alors f est comprise entre 0 et 1.
9. **VRAI** **FAUX** L'estimateur du maximum de vraisemblance est un estimateur sans biais.

10. **VRAI** **FAUX** $Var(aX) = aVar(X)$ pour tout $a \geq 0$.

11. **VRAI** **FAUX** $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$ si et seulement si X et Y sont indépendants,

12. **VRAI** **FAUX** L'estimateur du maximum de vraisemblance est un estimateur asymptotiquement Gaussien si et seulement si les variables sont Gaussiennes.

13. **VRAI** **FAUX** L'estimateur par la méthode des moments est toujours un estimateur asymptotiquement Gaussien.

14. **VRAI** **FAUX** $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $corr(X,Y) = \rho$, alors
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}\right).$$

15. **VRAI** **FAUX** Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $X+Y$ suit une loi normale centrée.

16. **VRAI** **FAUX** Si $\mathbb{E}(X) = 0$ et $Var(X) = 0$ alors $X = 0$.

17. **VRAI** **FAUX** Soit X une variable aléatoire de densité $f(\cdot)$ alors $f(\cdot)^2$ est la densité de $Y = X^2$.

18. **VRAI** **FAUX** Soient F une fonction de répartition sur $\mathbb{R}$, alors F^2 est également une fonction de répartition.

19. **VRAI** **FAUX** Si X suit une loi exponentielle de moyenne 2, alors $Y = X/2$ suit une loi exponentielle de paramètre 1.

20. **VRAI** **FAUX** Si X suit une loi de Poisson, alors $\mathbb{E}(X) = Var(X)$.

21. **VRAI** **FAUX** $Cov(X,Y) = \sqrt{Var(X) \cdot Var(Y)}$ si et seulement s'il existe a et b tels que $Y = aX + b$

22. **VRAI** **FAUX** L'estimateur des moments est un estimateur sans biais.

23. **VRAI** **FAUX** Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes telles que $X_1 \sim \mathcal{B}(n, p_1)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n, p_2)$, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n, p_1 + p_2)$

24. **VRAI** **FAUX** Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes telles que $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ et $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$, alors $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$

25. **VRAI** **FAUX** Si (X,Y) est un vecteur Gaussien tel que $X, Y \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors la loi conditionelle de Y sachant $X = x$ suit une loi normale centrée en x.

26. **VRAI** **FAUX** La loi de Poisson est une *bonne* approximation de la loi binomiale pour n petit et p grand, avec $p \times n \sim \lambda$.

27. **VRAI** **FAUX** La loi normale est une *bonne* approximation de la loi binomiale pour n grand et p ni trop grand, ni trop petit.

28. **VRAI** **FAUX** La loi normale est une *bonne* approximation de la loi de Student dont le nombre de degrés de liberté est grand.

29. **VRAI** **FAUX** Soit X une loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors $\mathbb{P}(-1.96 < X \leq 1.96) = 95\%$.

30. **VRAI** **FAUX** On effectue 4 tirages d'une loi $\mathcal{N}(\mu, 1)$, et on obtient $\overline{x} = 1.5$. L'intervalle de confiance à 95% pour μ est $[0, 3]$.

Les 2 questions suivantes portent sur la distribution de probabilité ci-jointe, associée à une variable aléatoire X

k	0	1	2	a
$\mathbb{P}(X = k) =$	$2b$	$3b$	$2b$	$3b$

29. **VRAI** **FAUX** La valeur de b pour que cette distribution soit une distribution de probabilité est 1/10.

30. **VRAI** **FAUX** La valeur de a pour que $\mathbb{E}(X) = 4$ est 11.

Les 3 questions suivantes portent sur la distribution de probabilité ci-jointe,

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X=0, Y=0) = 0.15 \\ \mathbb{P}(X=0, Y=1) = 0.2 \\ \mathbb{P}(X=1, Y=0) = 0.45 \\ \mathbb{P}(X=1, Y=1) = 0.2 \end{cases}$$

31. **VRAI** **FAUX** $\mathbb{E}(Y) = 0.3$.

32. **VRAI** **FAUX** $\mathbb{E}(X|Y=0) = 0.75$.

33. **VRAI** **FAUX** $Var(X|Y=0) = 0.2$.

Les 3 questions suivantes portent sur la distribution de probabilité ci-jointe, associée à une variable aléatoire X

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k) =$	2α	3α	α	5α	4α

34. **VRAI** **FAUX** La valeur de α pour que cette distribution soit une distribution de probabilité est 1/15.

35. **VRAI** **FAUX** La probabilité $\mathbb{P}(X \leq 2)$ vaut 1/3.

36. **VRAI** **FAUX** L'espérance $\mathbb{E}(X)$ appartient à $]0, 4[$.

Les 3 questions suivantes portent sur la description suivante d'un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{U}([0, \theta])$

```
length(X)         8
mean(X)    3.223632
sd(X)      2.195010
var(X)     4.818070
median(X)  2.877186
min(X)     0.770884
max(X)     7.483247
```

37. **VRAI** **FAUX** $\widehat{\theta} = 6.447265$ est obtenu en considérant un estimateur sans biais de θ.

38. **VRAI** **FAUX** $\widehat{\theta} = 7.483247$ est obtenu en considérant un estimateur sans biais de θ.

39. **VRAI** **FAUX** Dans ce cas particulier, l'estimateur des moments n'est pas un estimateur pertinant.

La question suivante porte sur la description suivante d'un échantillon i.i.d. de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$

```
length(X)         36
mean(X)     7.008343
sd(X)       2.008513
var(X)      7.554326
median(X)   6.520292
min(X)      3.191960
max(X)     13.994632
```

40. **VRAI** **FAUX** On rejette $H_0 : \mu = 6$ contre $H_0 : \mu \neq 6$ avec un niveau de confiance $\alpha = 95\%$.