G01. Algèbre commutative

Contrôle du 27 novembre 2006

Les exercices sont indépendants. Durée : 2 heures

1

Dans cet exercice A désigne un anneau intègre.

1.1. Donner la définition d'élément *irréductible*. Soit $p \in A$ un élément non nul tel que l'idéal pA soit premier ; montrer que p est irréductible.

On rappelle que, dans un anneau factoriel, tout élément irréductible engendre un idéal premier.

1.2. (*Cette question, plus difficile que les suivantes, amène simplement des exemples, et ne sera pas utilisée dans la suite*) Soit K le corps des fractions de A. Soit t un élément de A. Montrer que $X^2 - t$ est irréductible dans $A[X]$ si et seulement si t n'est pas le carré d'un élément de A.

Montrer que $X^2 - t$ engendre un idéal premier de $A[X]$ si et seulement si t n'est pas le carré d'un élément de K (Montrer d'abord que le condition est nécessaire ; pour montrer qu'elle est suffisante, on pourra utiliser la division euclidienne par $X^2 - t$).

1.3. Montrer que si A est principal, et si p engendre un idéal premier de A, alors cet idéal est même maximal. Donner un exemple d'anneau factoriel (non principal !) contenant un élement premier qui n'engendre pas un idéal maximal.

La question qui suit concerne la réciproque de la précédente. On suppose que A est factoriel et que tout élément irréductible de A engendre un idéal maximal ; il s'agit de montrer que A est principal.

1.4. Montrer que si a et b n'ont pas de diviseur commun, alors $aA + bA = A$ (on pourra raisonner par récurrence sur le nombre de diviseurs premiers de a).

En déduire que tout idéal engendré par deux éléments est principal.

1.5. (*Facultatif, mais apporte des points supplémentaires à ceux qui auraient regardé le corrigé du contrôle précédent*) Montrer que si tout idéal de A engendré par deux éléments est principal, alors A est principal.

2

Soit A un anneau (commutatif) et E un A-module. Pour un élément $a \in A$, on désigne par a_E l'homotétie de rapport a dans E, et par $\mathrm{Ker}(a_E)$ son noyau ; c'est donc le sous-module de E formé des $x \in E$ tels que $ax = 0$.

2.1. Dans cette question, $E = \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, et $a = 2$. Déterminer $\mathrm{Ker}(2_E)$, $E/2E$, ainsi que l'application composée $\mathrm{Ker}(a_E) \to E \to E/aE$.

Dans la suite, a et b sont deux éléments de A tels que $aA + bA = A$, et E est un A-module tel que $abE = 0$.

2.2. Montrer que le morphisme canonique

$$E \longrightarrow E/aE \times E/bE$$

est un isomorphisme. Voyez-vous un rapport entre cette propriété et le théorème chinois ?

2.3. Montrer qu'on a une décomposition en somme directe

$$\mathrm{Ker}(a_E) \oplus \mathrm{Ker}(b_E) = E.$$

Pour la fin de la question **2.3**, considérer le cas où $A = K[X]$ est un anneau de polynômes à coefficients dans un corps, et où E est un K-espace vectoriel muni d'un endomorphisme, grâce auquel on le considère comme un $K[X]$-module. Expliquer comment retrouver le *lemme des noyaux* à partir de la décomposition précédente.

2.4. Montrer que l'application composée

$$\mathrm{Ker}(a_E) \longrightarrow E \longrightarrow E/aE$$

est un isomorphisme. Expliquer la différence avec la question **2.1**.

3

3.1. Soit I un idéal d'un anneau (commutatif) A. Soit E un A-module *de type fini* tel que $E = IE$. Le but de cette question est de montrer qu'il existe un élément $a \in I$ tel que $(1 + a)E = 0$.

Soit $\{x_1, \dots, x_n\}$ un système générateur du module E. Traduire la relation $E = IE$ en n égalités :

$$\begin{array}{rcccccccc} x_1 & = & c_{11}x_1 & + & c_{12}x_2 & + & \cdots & + & c_{1n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & & & & & \vdots \\ x_n & = & c_{n1}x_1 & + & c_{n2}x_2 & + & \cdots & + & c_{nn}x_n \end{array}$$

où les coefficients c_{ij} sont dans I ; soit $C = (c_{ij})$ la matrice carrée correspondant. Montrer que $\det(1_n - C)$ annule E (penser à la matrice des cofacteurs). Conclure.

3.2. Soit F un A-module, et $f : F \to F$ une application A-linéaire. Expliquer pourquoi on définit une structure de $A[X]$-module sur F en posant $P.x = P(f)(x)$ pour tout $x \in F$ et tout $P \in A[X]$.

Soit $I = (X)$ l'idéal de $A[X]$ engendré par X. Quel est le sous-module $IF \subset F$?

On suppose maintenant que F est un A-module de type fini, et que f est surjective. Montrer que f est un isomorphisme en utilisant la propriété établie en **3.1**.