UNIVERSITÉ DE RENNES 1

UFR DE MATHÉMATIQUES

Master STS, mention mathématiques

ALGÈBRE COMMUTATIVE (*G1*)

Contrôle continudu 23 octobre 2006 (2 heures)

Documents, notes de cours ou de TD, téléphones portables, calculatrices sont interdits.
À moins que l'énoncé d'une question ne vous dise le contraire, vous pouvez utiliser librement les résultats du cours sans les redémontrer.

QUESTION DE COURS

Soit A un anneau commutatif. Soit I et J deux idéaux de A.
Montrer que le morphisme canonique $A/(IJ) \to (A/I) \times (A/J)$ est un isomorphisme si et seulement si $I + J = A$.

EXERCICE 1

Soit A l'anneau $\mathbf{Q}[X, Y]$. Pour toute partie Z de $\mathbf{C}^2$, on note I_Z l'ensemble des $P \in A$ tels que $P(x, y) = 0$ pour tout $(x, y) \in Z$.

1 Soit $(x_0, y_0) \in \mathbf{Q}^2$; posons $Z_0 = \{(x_0, y_0)\}$. Montrer que I_{Z_0} est un idéal non principal de A.

2 Soit Z une partie finie non vide de $\mathbf{Q}^2$. Montrer que l'idéal I_Z n'est pas principal.

3 Soit $x_1 \in \mathbf{Q}$ et soit $y_1 \in \mathbf{C}$ un nombre transcendant. On pose $Z_1 = \{(x_1, y_1)\}$. Montrer que l'idéal I_{Z_1} est principal.

EXERCICE 2

Soit A un anneau commutatif et soit t un élément simplifiable de A. On suppose que l'idéal tA est maximal et que $\bigcap_{n\in\mathbf{N}} t^n A = \{0\}$.

1 Montrer que le morphisme canonique $i \colon A \to A_t$ est injectif et n'est pas surjectif.

2 Soit $x \in A_t \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe un unique couple $(a, n) \in A \times \mathbf{Z}$ tel que $x = \dfrac{a}{t^n}$ et que $a \notin tA$.

3 Soit B un sous-anneau de A_t contenant $i(A)$. Montrer que $B = i(A)$ ou $B = A_t$.

EXERCICE 3

Soit A un anneau factoriel. Pour tout $x \in A \setminus \{0\}$, on note $\omega(x)$ le nombre de facteurs irréductibles (comptés avec multiplicité) de x. On suppose que tout idéal de A engendré par deux éléments est principal.

1 Soit I un idéal non nul de A. Soit x un élement de $I \setminus \{0\}$ tel que $\omega(x) = \inf_{y\in I\setminus\{0\}} \omega(y)$. Montrer que x engendre I.

2 En déduire que l'anneau A est principal.