

### QUESTION DE COURS

Soit  $A$  un anneau commutatif. Soit  $I$  et  $J$  deux idéaux de  $A$ .

Montrer que le morphisme canonique  $A/(IJ) \rightarrow (A/I) \times (A/J)$  est un isomorphisme si et seulement si  $I + J = A$ .

### SOLUTION

Le morphisme en question, notons-le  $\varphi$ , est défini comme suit. Soit  $f: A \rightarrow (A/I) \times (A/J)$  l'homomorphisme d'anneaux qui, à  $x \in A$ , associe le couple  $(x \bmod I, x \bmod J)$  formé des classes de  $x$  modulo  $I$  et  $J$  respectivement.

Soit  $x \in I$  et  $y \in J$ . Alors,  $xy \in I$  et  $xy \in J$ ; par suite,  $f(xy) = 0$ . Le noyau de  $f$  contient donc l'idéal engendré par ces produits  $xy$ , idéal qui n'est autre que  $IJ$ . Il en résulte, par le théorème de factorisation, un homomorphisme  $\varphi: A/IJ \rightarrow (A/I) \times (A/J)$ .

Les homomorphismes  $f$  et  $\varphi$  ont même image. Montrons que  $f$  (donc  $\varphi$ ) est surjectif si et seulement si  $I + J = A$ .

Supposons  $f$  surjectif. Soit  $x \in A$  tel que  $f(x) = (1, 0)$ . Alors  $x \in J$  et  $x - 1 \in I$ . On a donc  $1 = x - (x - 1) \in I + J$ . Par suite,  $I + J = A$ .

Supposons inversement que  $I + J = A$  et soit  $a \in I$  et  $b \in J$  tels que  $1 = a + b$ . On a donc  $f(a) = (0, 1)$  et  $f(b) = (1, 0)$ . Par suite, pour  $x$  et  $y \in A$ ,  $f(ay + bx) = (x \bmod I, y \bmod J)$ . Cela démontre que  $f$  est surjectif.

Supposons maintenant  $f$  surjectif et montrons que  $\varphi$  est un isomorphisme. Fixons encore  $a \in I$  et  $b \in J$  tels que  $1 = a + b$ . Il suffit de montrer que le noyau de  $f$  est égal à  $IJ$ . L'inclusion  $IJ \subset \text{Ker}(f)$  a déjà été démontrée; prouvons l'autre. Soit  $x \in A$  tel que  $f(x) = 0$ ; on a donc  $x \in I$  et  $x \in J$ . Par définition,  $xa \in IJ$ , car  $x \in J$  et  $a \in I$ , et  $xb \in IJ$  car  $x \in I$  et  $b \in J$ . Par suite, Comme  $x = x \cdot 1 = x(a + b) = xa + xb$ ,  $x \in IJ$ , ce qu'il fallait démontrer.

### EXERCICE 1

Soit  $A$  l'anneau  $\mathbf{Q}[X, Y]$ . Pour toute partie  $Z$  de  $\mathbf{C}^2$ , on note  $I_Z$  l'ensemble des  $P \in A$  tels que  $P(x, y) = 0$  pour tout  $(x, y) \in Z$ .

- 1 Soit  $(x_0, y_0) \in \mathbf{Q}^2$ ; posons  $Z_0 = \{(x_0, y_0)\}$ . Montrer que  $I_{Z_0}$  est un idéal non principal de  $A$ .
- 2 Soit  $Z$  une partie finie non vide de  $\mathbf{Q}^2$ . Montrer que l'idéal  $I_Z$  n'est pas principal.
- 3 Soit  $x_1 \in \mathbf{Q}$  et soit  $y_1 \in \mathbf{C}$  un nombre transcendant. On pose  $Z_1 = \{(x_1, y_1)\}$ . Montrer que l'idéal  $I_{Z_1}$  est principal.

## SOLUTION

On remarque que  $I_Z$  est un idéal de  $A$  pour toute partie  $Z$  de  $\mathbf{C}^2$ ; c'est en effet le noyau de l'homomorphisme évident de  $\mathbf{Q}[X, Y]$  dans l'anneau des fonctions de  $Z$  dans  $\mathbf{C}$ .

- 1 Supposons par l'absurde que l'idéal  $I_{Z_0}$  soit principal et soit  $P$  un générateur de  $I_{Z_0}$ . Comme  $X - x_0 \in I_{Z_0}$ , c'est multiple de  $P$ ; en considérant les degrés, il vient  $\deg_X P \leq 1$  et  $\deg_Y P = 0$ . De même, utilisant  $Y - y_0$ , on trouve  $\deg_Y P = 0$  et  $\deg_X P \leq 1$ . Par suite,  $P$  est constant, donc nul et l'idéal  $I_{Z_0}$  est nul, ce qui est absurde.
- 2 Notons  $O_1, \dots, O_n$  les points de  $Z$  et soit  $(x_i, y_i)$  les coordonnées du point  $O_i$ . Supposons que l'idéal  $I_Z$  soit principal, engendré par  $P$ . Les polynômes  $\prod_{i=1}^n (X - x_i)$  et  $\prod_{i=1}^n (Y - y_i)$  appartiennent à  $I_Z$ , donc sont multiples de  $P$ . Par suite,  $\deg_Y P = 0$  et  $\deg_X P = 0$ , donc  $P$  est constant. Comme  $Z$  n'est pas vide, cette constante est nulle. Donc  $I_Z = 0$ , ce qui est absurde puisqu'il contient (au moins) les deux polynômes écrits ci-dessus.
- 3 Soit  $P$  un élément de  $I_{Z_1}$ . Par division euclidienne par  $X - x_1$  dans  $\mathbf{Q}[Y][X]$ , il existe un polynôme  $P_1 \in \mathbf{Q}[Y]$  et un polynôme  $Q_1 \in \mathbf{Q}[X, Y]$  tels que  $P(X, Y) = (X - x_1)Q_1(X, Y) + P_1(Y)$ . Comme  $P_1 \in I_{Z_1}$ ,  $P_1(Y)$  aussi; en particulier,  $P_1(y_1) = 0$ . Comme  $y_1$  est transcendant,  $P_1 = 0$ . Autrement dit,  $P$  est multiple de  $X - x_1$  et  $I_{Z_1}$  est contenu dans l'idéal principal engendré par  $X - x_1$ . L'autre inclusion est évidente, d'où l'égalité  $I_{Z_1} = (X - x_1)$ .

## EXERCICE 2

Soit  $A$  un anneau commutatif et soit  $t$  un élément simplifiable de  $A$ . On suppose que l'idéal  $tA$  est maximal et que  $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} t^n A = \{0\}$ .

- 1 Montrer que le morphisme canonique  $i: A \rightarrow A_t$  est injectif et n'est pas surjectif.
- 2 Soit  $x \in A_t \setminus \{0\}$ . Montrer qu'il existe un unique couple  $(a, n) \in A \times \mathbf{Z}$  tel que  $x = \frac{a}{t^n}$  et que  $a \notin tA$ .
- 3 Soit  $B$  un sous-anneau de  $A_t$  contenant  $i(A)$ . Montrer que  $B = i(A)$  ou  $B = A_t$ .

## SOLUTION

- 1 Soit  $a \in \text{Ker}(i)$ , c'est-à-dire tel que  $\frac{a}{1} = \frac{0}{1}$ . Par définition de l'anneau  $A_t$ , il existe  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $t^n a = 0$ . Comme  $t$  est simplifiable,  $a = 0$ . Autrement dit,  $i$  est injectif.  
Supposons par l'absurde que  $\frac{1}{t}$  appartienne à l'image de  $i$ . Soit  $a \in A$  tel que  $\frac{a}{1} = \frac{1}{t}$ ; il existe donc  $n \in \mathbf{N}$  tel que  $t^n (ta - 1) = 0$ , d'où  $ta = 1$  puisque  $t$  est simplifiable. Alors,  $t$  est inversible dans  $A$ , ce qui contredit l'hypothèse que  $t$  appartient à l'idéal maximal  $tA$ .
- 2 Commençons par montrer l'unicité. Supposons  $a/t^n = b/t^m$ , avec  $a$  et  $b \in A \setminus (t)$ . Supposons pour fixer les idées  $n \leq m$ ; alors  $t^{m-n}a = b$ . Comme  $b \notin (t)$ ,  $m - n = 0$  et  $a = b$ .  
Montrons maintenant l'existence. Soit  $x \in A_t$ . Supposons d'abord  $x \notin i(A)$ . Par hypothèse, il existe un couple  $(a, n)$  avec  $a \in A$  et  $n \geq 0$  tel que  $x = a/t^n$ , et l'on a d'ailleurs  $n \geq 1$ . Supposons que  $n$  soit minimal; alors  $a$  n'est pas multiple de  $t$  (si  $a = bt$ ,  $x = b/t^{n-1}$ ).  
Supposons maintenant  $x \in i(A)$ ,  $x \neq 0$ . Comme l'intersection des  $t^n A$  pour  $n \geq 0$  est réduite à  $\{0\}$ , il existe un plus grand entier  $n$  tel que  $x \in t^n A$ . Pour cet entier  $n$ , soit  $a \in A$  tel que  $x = t^n a$ . Par maximalité de  $n$ ,  $a \notin tA$ ; on peut donc écrire  $x = a/t^{-n}$  et le couple  $(a, -n)$  convient.
- 3 Supposons que  $i(A) \subsetneq B$  et soit  $x$  un élément de  $B \setminus i(A)$ . On l'écrit  $a/t^n$ ; nécessairement  $n > 0$ . Quitte à changer  $x$  en  $t^{n-1}x$  et  $a$  en  $t^{n-1}a$ , on peut supposer  $n = 1$ . Comme  $a \notin tA$  et que  $tA$  est

un idéal maximal,  $A/tA$  est un corps et il existe  $b \in A$  tel que  $ab \equiv 1 \pmod{t}$ , soit donc  $c \in A$  tel que  $ab = 1 + tc$ . Alors,  $bx$  est un élément de  $B$  donné par

$$bx = \frac{ab}{t} = \frac{1+tc}{t} = \frac{1}{t} + i(c).$$

Par suite,  $1/t$  appartient à  $B$ .

En écrivant un élément de  $A_t$  sous la forme  $i(a)t^{-n}$ , avec  $n \geq 0$ , il en résulte que  $B = A_t$ .

### EXERCICE 3

Soit  $A$  un anneau factoriel. Pour tout  $x \in A \setminus \{0\}$ , on note  $\omega(x)$  le nombre de facteurs irréductibles (comptés avec multiplicité) de  $x$ . On suppose que tout idéal de  $A$  engendré par deux éléments est principal.

- 1 Soit  $I$  un idéal non nul de  $A$ . Soit  $x$  un élément de  $I \setminus \{0\}$  tel que  $\omega(x) = \inf_{y \in I \setminus \{0\}} \omega(y)$ . Montrer que  $x$  engendre  $I$ .
- 2 En déduire que l'anneau  $A$  est principal.

### SOLUTION

- 1 Soit  $y$  un élément de  $I$ ; montrons que  $y$  est multiple de  $x$ . Cela revient à montrer que l'idéal  $(x, y)$  est égal à l'idéal  $(x)$ . Notons que l'on a  $(x, y) \subset I$ . Par hypothèse, l'idéal  $(x, y)$  de  $A$  est principal; choisissons-en un un générateur,  $z$ ;  $c$ 'est un élément non nul de  $I$ . L'élément  $x$  est multiple de  $z$ ; soit  $a \in A$  tel que  $x = az$ . Alors,  $\omega(x) = \omega(a) + \omega(z)$ , d'où en particulier  $\omega(x) \geq \omega(z)$ . Comme  $z \in I \setminus \{0\}$  et que  $x$  est un élément non nul de  $I$  tel que  $\omega(x)$  soit minimal, on a donc  $\omega(x) = \omega(z)$  et  $\omega(a) = 0$ . Par suite,  $a$  est inversible et  $(x, y) = (z) = (x)$ .
- 2 L'anneau  $A$  est intègre. Soit  $I$  un idéal de  $A$ . Si  $I = \{0\}$ ,  $I$  est principal, engendré par 0. Sinon, la question précédente montre que  $I$  est engendré par un élément  $x$  de  $I \setminus \{0\}$  tel que  $\omega(x)$  soit minimal. C'est en particulier un idéal principal. Cela démontre que l'anneau  $A$  est principal.