



## G1. ALGÈBRE COMMUTATIVE.

## Feuille d'exercice n° 3: Modules

A. CHAMBERT-LOIR, P. AUTISSIER, D. FERRAND

## A. MODULES, PREMIERS PAS

**EXERCICE 1**

Soit  $M$  un  $A$ -module. Montrer que  $(-1)m = -m$ .

**EXERCICE 2**

Soit  $A$  un anneau et soit  $M$  un  $A$ -module à droite.

- 1 Montrer que l'ensemble  $(0 : M)$  des  $a \in A$  tels que  $ma = 0$  pour tout  $m \in M$  est un idéal bilatère de  $A$  (annulateur de  $M$ ). On le note aussi  $\text{ann}(M)$ .
- 2 Plus généralement, soit  $N$  un sous- $A$ -module de  $M$ . Montrer que l'ensemble  $(N : M)$  des  $a \in A$  tels que  $ma \in N$  pour tout  $m \in M$  est un idéal bilatère de  $A$ .

**EXERCICE 3**

Soit  $A$  et  $B$  deux anneaux et  $f : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux.

- 1 Soit  $M$  un  $B$ -module à droite. Montrer que l'on définit un  $A$ -module à droite en munissant le groupe abélien  $M$  de la multiplication  $(M, A) \rightarrow M$  définie par  $(m, a) \mapsto mf(a)$ . Ce  $A$ -module est noté  $f_*M$ .
- 2 Soit  $u : M \rightarrow N$  un homomorphisme de  $B$ -modules à droite; montrer que  $u$  définit un homomorphisme de  $A$ -modules  $f_*M \rightarrow f_*N$ .
- 3 Montrer que l'application  $\text{Hom}_B(M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(f_*M, f_*N)$  ainsi définie est un homomorphisme injectif de groupes abéliens. Donner un exemple où il n'est pas surjectif.
- 4 Soit  $M$  un  $B$ -module à droite. Déterminer l'annulateur du module  $f_*M$  en fonction de celui de  $M$ .

**EXERCICE 4**

Soit  $A$  et  $B$  des anneaux et  $f : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux. Le groupe additif de  $B$  est muni de la structure de  $A$ -module à droite déduite de  $f$ .

- 1 On suppose que l'image de  $f$  est contenue dans le centre de  $B$  (de sorte que  $B$  est une  $A$ -algèbre). Montrer que la multiplication de  $B$  est  $A$ -bilinéaire (c'est-à-dire que les applications  $x \mapsto xb$  et  $x \mapsto bx$ , pour  $b \in B$  fixé, sont  $A$ -linéaires).

- 2 Inversement, si la multiplication de  $B$  est  $A$ -bilinéaire, montrer que l'image de  $f$  est contenue dans le centre de  $B$ .

**EXERCICE 5**

Soit  $M$  et  $N$  deux  $A$ -modules.

- 1 Soit  $u \in \text{End}_A M$ . Montrer qu'il existe une unique structure de  $A[X]$ -module sur  $M$  telle que  $X \cdot m = u(m)$  (et  $1 \cdot m = m$ ) pour tout  $m \in M$ . On notera  $M_u$  le  $A[X]$ -module  $M$  muni de cette structure. Montrer que cette application  $u \mapsto M_u$  induit une bijection entre les structures de  $A[X]$ -module sur  $M$  et les endomorphismes  $u \in \text{End} M$ .
- 2 Soit  $u \in \text{End}_A M$  et  $v \in \text{End}_A N$ . Déterminer tous les homomorphismes de  $A[X]$  modules de  $M_u$  dans  $N_v$ .
- 3 Si  $M = N$ , à quelle condition  $M_u \simeq M_v$  ?
- 4 Comment pouvez-vous interpréter les résultats de l'exercice lorsque  $A = k$  est un corps et  $M = k^n$  est l'espace vectoriel standard de dimension  $n$  sur  $k$  ?

**EXERCICE 6**

- 1 La réunion de deux sous-modules n'est en général pas un sous-module. Donner un exemple (on pourra se placer dans le cadre des espaces vectoriels).
- 2 Si  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une famille de sous-modules d'un  $A$ -module  $M$  telle que  $M_n \subset M_p$  si  $n \leq p$ , montrer que  $\bigcup_n M_n$  est un sous- $A$ -module de  $M$ .
- 3 Soit  $k$  un corps, soit  $V$  un  $k$ -espace vectoriel et soit  $(W_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $V$  telle que  $W = \bigcup_i W_i$  soit un sous-espace vectoriel. Si  $k$  est infini ou, plus généralement, si  $k$  a au moins  $n$  éléments, montrer qu'il existe un entier  $i$  tel que  $W = W_i$ .
- 4 Soit  $V_1, V_2$  et  $V_3$  les ensembles des  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que  $x$  soit pair, resp.  $x + y$  soit pair, resp.  $y$  soit pair. Montrer que ce sont des sous-modules de  $\mathbb{Z}^2$ , distincts de  $\mathbb{Z}^2$ , et que  $\mathbb{Z}^2 = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ .

**EXERCICE 7**

Soit  $M$  un  $A$ -module et  $M_1, \dots, M_r$  des sous- $A$ -modules de  $M$  dont  $M$  est la somme directe. Soit  $I_1 = (0 : M_1), \dots, I_r = (0 : M_r)$  leurs annulateurs. On suppose que les  $I_\alpha$  sont deux à deux comaximaux.

On pose :  $I = \bigcap_{\alpha=1}^r I_\alpha$  et  $J_\alpha = \bigcap_{\beta \neq \alpha} I_\beta$ .

- 1 Montrer que pour tout  $\alpha$ ,  $I_\alpha$  et  $J_\alpha$  sont des idéaux bilatères comaximaux de  $A$ .

Pour tout  $\alpha$ , soit  $N_\alpha$  le sous-module de  $M$  engendré par les  $M_\beta$ , pour  $\beta \neq \alpha$ . Si  $J$  est un idéal de  $A$ , on notera  $(0 : J)$  le sous- $A$ -module de  $M$  égal à  $\{m \in M; ma = 0 \text{ pour tout } a \in J\}$ .

Montrer les formules suivantes :

- 2  $J_\alpha = (0 : N_\alpha)$  et  $N_\alpha = (0 : J_\alpha)$ ;
- 3  $N_\alpha = MI_\alpha$  et  $MJ_\alpha = M_\alpha = \bigcap_{\beta \neq \alpha} N_\beta$ .

**EXERCICE 8**

Soit  $M$  un  $A$ -module et  $m \in M$  un élément dont l'annulateur est réduit à  $(0)$ . Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

- (1)  $mA$  possède un supplémentaire dans  $M$ ;
- (2) il existe une forme linéaire  $f$  sur  $M$  telle que  $f(m) = 1$ .

Montrer qu'alors  $M = mA \oplus \text{Ker } f$ .

**EXERCICE 9**

Soit  $f : M \rightarrow N$  un homomorphisme de  $A$ -modules.

- 1 Montrer qu'il existe  $g : N \rightarrow M$  tel que  $g \circ f = \text{id}_M$  si et seulement si  $f$  est injectif et  $\text{im}(f)$  admet un supplémentaire dans  $N$ .
- 2 Montrer qu'il existe  $g : N \rightarrow M$  tel que  $f \circ g = \text{id}_N$  si et seulement si  $f$  est surjectif et  $\text{Ker}(f)$  admet un supplémentaire dans  $M$ .

**EXERCICE 10**

Soit  $A$  un anneau, soit  $M$  un  $A$ -module et soit  $(M_i)_{i \in I}$  une famille de sous-modules de  $M$  dont la somme est égale à  $M$ .

- 1 Pour que les  $M_i$  soient en somme directe, il faut et il suffit que Pour tout  $i \in I$ , l'intersection des sous-modules  $M_i$  et  $\sum_{j \neq i} M_j$  soit réduite à  $0$ .
- 2 Donner un exemple de module  $M$ , de famille  $(M_1, M_2, M_3)$  de sous-modules dont la somme est égale à  $M$  et telle que  $M_i \cap M_j = 0$  pour tout couple  $(i, j)$  avec  $i \neq j$ , mais qui ne soit pas en somme directe.

**B. MODULES LIBRES****EXERCICE 11**

- 1 Quelles sont les parties génératrices de  $\mathbf{Z}$ ?
- 2 Donner, pour tout entier  $n \geq 1$ , une partie de  $\mathbf{Z}$  de cardinal  $n$  qui soit génératrice et minimale.
- 3 Montrer que toute partie génératrice de  $\mathbf{Z}$  contient une partie finie qui est génératrice.

**EXERCICE 12**

Soit  $A$  un anneau et  $M$  un  $A$ -module. Si  $m \in M$ , à quelle condition sur  $\text{ann}(m)$  la famille  $\{m\}$  est-elle libre?

**EXERCICE 13**

Soit  $A$  un anneau commutatif intègre et  $K$  son corps des fractions. On suppose  $K \neq A$ . Montrer que  $K$  n'est pas libre comme  $A$ -module.

**EXERCICE 14**

Donner des exemples :

- 1 de modules non-libres ;
- 2 d'une famille libre à  $n$  éléments dans  $A^n$  qui ne soit pas une base ;
- 3 d'une partie génératrice minimale qui ne soit pas une base ;
- 4 de sous-module n'ayant pas de supplémentaire ;
- 5 de module libre ayant un sous-module qui ne l'est pas ;

**EXERCICE 15. — Bidual**

Soit  $M$  un  $A$ -module. On note  $M^\vee = \text{Hom}_A(M, A)$  son dual et  $M^{\vee\vee} = \text{Hom}_A(M^\vee, A)$  son bidual, c'est-à-dire le dual de son dual.

- 1 Soit  $m \in M$ . Montrer que l'application

$$\lambda_m : M^\vee \rightarrow A, \quad \varphi \mapsto \varphi(m)$$

est  $A$ -linéaire. En déduire un homomorphisme de  $A$ -modules  $\lambda : M \rightarrow M^{\vee\vee}$  donné par  $m \mapsto \lambda_m$ .

- 2 Dans cette question et la suivante, on suppose que  $M = A^n$ ,  $n \geq 1$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $A^n$ , c'est-à-dire  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ , le 1 étant en position  $i$ . Soit  $\varphi_i$  l'application linéaire  $A^n \rightarrow A$  définie par  $(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_i$ . Montrer que  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est une base de  $M^\vee$ .
- 3 Toujours lorsque  $M = A^n$ , montrer que  $\lambda$  est un isomorphisme.  
Un tel module  $M$  pour lequel l'homomorphisme canonique  $M \rightarrow M^{\vee\vee}$  est un isomorphisme est dit *réflexif*.
- 4 Donner un exemple de module pour lequel  $\lambda$  n'est pas injectif; pas surjectif.

#### EXERCICE 16

Soit  $M$  un  $A$ -module. Soit  $f \in \text{End}_A(M)$ ; on définit sa transposée  ${}^t f$  par  ${}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$ , pour tout  $\varphi \in M^\vee = \text{Hom}_A(M, A)$ .

- 1 Montrer que l'ensemble des polynômes  $P$  de  $A[X]$  tels que  $P(f) = 0$  est un idéal que l'on notera  $I(f)$ .
- 2 Montrer que  $I(f) \subset I({}^t f)$ .
- 3 Montrer que si  $M$  est réflexif,  $I(f) = I({}^t f)$ .

#### EXERCICE 17

Montrer qu'un idéal non nul  $I$  d'un anneau  $A$  est un sous-module libre de  $A$  si et seulement si  $I$  est principal et engendré par un élément non diviseur de zéro de  $A$ .

#### EXERCICE 18

Soit  $A$  un anneau,  $M$  et  $N$  des  $A$ -modules et  $\varphi : M \rightarrow N$  un homomorphisme surjectif de  $A$ -modules.

- 1 Si  $\text{Ker } \varphi$  et  $N$  sont de type fini, montrer que  $M$  est de type fini.  
On suppose dans la suite que  $M$  et  $N$  sont de type fini et que  $N$  est un  $A$ -module libre.
- 2 Montrer que  $\varphi$  admet un inverse à droite.
- 3 Montrer que  $M \simeq \text{Ker } \varphi \oplus \text{im } \varphi$ .
- 4 Retrouver ainsi le fait que tout sous-espace d'un espace vectoriel possède un supplémentaire.
- 5 Montrer que  $\text{Ker } \varphi$  est de type fini.

#### EXERCICE 19

- 1 Soit  $L$  un  $A$ -module libre non nul. Montrer qu'il existe une application linéaire  $\varphi : \text{End}_A(L) \rightarrow A$  telle que  $\varphi(\text{id}) = 1$ .  
Soit  $f : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux tel que  $B$  soit un  $A$ -module libre non nul.
- 2 Montrer que  $f$  est injectif. On identifiera dans la suite  $A$  à un sous-anneau de  $B$ ; si  $I$  est un idéal de  $A$ , on notera  $IB$  l'idéal de  $B$  engendré par  $I$  dans  $B$ .
- 3 Pour tout idéal  $I$  de  $A$ ,  $I = A \cap IB$ .
- 4 Tout élément de  $A$  qui possède un inverse dans  $B$  est en fait inversible dans  $A$ .
- 5 Pour tout idéal premier (*resp.* maximal)  $\mathfrak{p}$  de  $A$ , il existe un idéal premier (*resp.* maximal)  $\mathfrak{q}$  de  $B$  tel que  $\mathfrak{p} = A \cap \mathfrak{q}$ .
- 6 Tout système d'équations linéaires à coefficients dans  $A$  qui a une solution dans  $B$  a déjà une solution dans  $A$ .

### C. MODULES QUOTIENTS

#### EXERCICE 20

Soit  $A$  un anneau intègre et  $M$  un  $A$ -module. On dit que  $x \in M$  est de torsion si  $(0 : x) \neq 0$ . On note  $T(M)$  l'ensemble des éléments de torsion de  $M$ . Si  $T(M) = 0$  on dit que  $M$  est sans torsion.

- 1 Montrer que l'ensemble des éléments de torsion de  $M$  est un sous-module de  $M$ . Donner un contre-exemple lorsque l'hypothèse que  $A$  est un anneau intègre n'est pas vérifiée.

- 2 Montrer que  $M/T(M)$  est sans torsion.
- 3 Montrer que si  $f : M \rightarrow N$  est un morphisme de  $A$ -modules alors  $f(T(M)) \subset T(N)$ . Donner un exemple où l'inclusion est stricte.
- 4 Soit  $g : N \rightarrow P$  un second morphisme de  $A$ -modules tel que  $\text{Ker } g = \text{im } f$ . Montrer que  $\text{Ker } g \cap T(N) = f(T(M))$ .

**EXERCICE 21**

Soit  $A$  un anneau, soit  $I$  un idéal bilatère de  $A$  et soit  $M$  un  $A$ -module à droite.

- 1 Montrer qu'il existe une unique structure de  $A/I$ -module à droite sur le  $A$ -module  $M/MI$  de sorte que l'on ait  $\text{cl}_{MI}(m) \text{cl}_I(a) = \text{cl}_{MI}(ma)$ , pour tout  $m \in M$  et tout  $a \in A$ .
- 2 Si  $M$  est un  $A$ -module libre, montrer que  $M/MI$  est un  $A/I$ -module libre.

**EXERCICE 22**

Soit  $A$  un anneau, soit  $M$  un  $A$ -module et soit  $N$  un sous-module de  $M$ .

- 1 Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes : 1)  $N$  possède un supplémentaire dans  $M$ ; 2)  $N$  est le noyau d'un projecteur de  $M$ ; 3)  $N$  est l'image d'un projecteur de  $M$ .
- 2 Soit  $p_0$  et  $p$  deux projecteurs de  $M$  d'image  $N$ , soit  $u$  l'application  $p - p_0$ . Montrer que l'image de  $u$  est contenue dans  $N$  et que son noyau contient  $N$ ; en déduire, par passage au quotient, une application linéaire  $\bar{u}: M/N \rightarrow N$ .
- 3 Soit  $p_0$  un projecteur de  $M$ ; montrer que l'application  $p \mapsto \bar{u}$  est une bijection de l'ensemble des projecteurs de  $M$  d'image  $N$  sur  $\text{Hom}_A(M/N, N)$ .

**EXERCICE 23**

Soit  $A$  un anneau commutatif et  $T$  une matrice  $n \times m$  à coefficients dans  $A$ . Cette matrice représente un homomorphisme de modules  $u: A^m \rightarrow A^n$ . Posons  $M = \text{coker } u = A^n / \text{im}(u)$ .

- 1 Montrer que  $(0 : M) = (\text{im}(u) : A^n)$ .
- 2 Montrer que si  $m \geq n$  alors les mineurs maximaux de  $T$  (c'est à dire les déterminants des sous matrices  $n \times n$  de  $T$ ) appartiennent à  $(0 : M)$ . (Traiter tout d'abord le cas  $m = n$ .)

**EXERCICE 24**

Soit  $A$  un anneau commutatif et  $u: A^n \rightarrow A^n$  un morphisme de matrice  $M_u$  dans la base canonique de  $A^n$ . Posons  $M = \text{coker } u = A^n / \text{im}(u)$  et soit  $u^*: A^n \rightarrow A^n$  dont la matrice  $M_{u^*}$  est la matrice transposée des cofacteurs de  $M_u$ . Enfin pour  $k \in \{1, \dots, n\}$  soit  $J_k$  l'idéal engendré par les mineurs  $k \times k$  de  $M_u$  (c'est-à-dire les déterminants des sous-matrices  $k \times k$  de  $M_u$ ). Remarquer que

$J_n = (\det(M_u))$  et que  $J_{n-1}$  est engendré par les coefficients de  $M_{u^*}$ .

- 1 Soit  $a \in (0 : M)$  et  $\mu_a: A^n \rightarrow A^n$ ,  $x \mapsto ax$ ; montrer qu'il existe un morphisme  $v: A^n \rightarrow A^n$  tel que  $\mu_a = u \circ v$ , et que  $\det(M_u)M_v = aM_{u^*}$ .
- 2 Montrer que  $(0 : M) \subset (J_n : J_{n-1})$ .  
On suppose désormais que  $\det(M_u)$  n'est pas diviseur de zéro.
- 3 Montrer que  $u^*$  est injectif.
- 4 Soit  $a \in (J_n : J_{n-1})$ ; montrer qu'il existe  $w: A^n \rightarrow A^n$  tel que  $au^* = \det(M_u)w$ . Montrer alors que  $u \circ w = \mu_a$ .
- 5 Montrer que  $(0 : M) = (J_n : J_{n-1})$ .

**EXERCICE 25**

On considère quatre éléments  $a, b, c, d$  d'un anneau commutatif  $A$  et un  $A$ -module  $M$  engendré par deux éléments  $x$  et  $y$  soumis aux relations

$$ax + by = 0 \quad \text{et} \quad cx + dy = 0.$$

Autrement dit,  $M$  est le quotient de  $A^2$  par l'image de l'endomorphisme de matrice  $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ . On pose  $\delta = ad - bc$  et on désigne par  $I$  l'idéal engendré par  $a, b, c$  et  $d$ .

- 1 Montrer que  $\delta M = 0$  (penser à la matrice des cofacteurs).
- 2 Montrer que  $M/IM$  est un  $A/I$ -module libre de rang 2.
- 3 Soit  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal de  $A$ . Déterminer la dimension de l'espace vectoriel  $M/\mathfrak{m}$  sur le corps  $A/\mathfrak{m}$  en fonction de  $\delta$  et  $I$ .

## D. ESPACES VECTORIELS

## EXERCICE 26

- 1 Soit  $M$  un sous- $\mathbf{Z}$ -module de type fini de  $\mathbf{Q}$ . Montrer que  $M$  est libre de rang 0 ou 1. (*Montrer par récurrence qu'il existe  $a \in \mathbf{Q}$  tel que  $M = \mathbf{Z}a$ .*) En particulier, le  $\mathbf{Z}$ -module  $\mathbf{Q}$  n'est pas de type fini.
- 2 Quelles sont les parties libres maximales de  $\mathbf{Q}$ ?
- 3 Le  $\mathbf{Z}$ -module  $\mathbf{Q}$  possède-t-il des parties génératrices minimales?

## EXERCICE 27

Soit  $K$  un corps, soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension infinie et soit  $A$  l'anneau des endomorphismes de  $V$ . Montrer que le  $A$ -module à droite  $A^2$  est isomorphe à  $A_d$ .

## EXERCICE 28

Soit  $A$  un anneau et soit  $\varphi: A^m \rightarrow A^n$  un homomorphisme de  $A$ -modules à droite libres. Soit  $\Phi$  la matrice de  $\varphi$ .

Soit  $f: A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux. Soit  $f(\Phi)$  la matrice dont les composantes sont les images par  $f$  des composantes de  $\Phi$ .

- 1 Montrer que  $f(\Phi)$  est la matrice d'un homomorphisme  $\varphi_0: B^m \rightarrow B^n$  de  $B$ -modules à droite.
- 2 Si  $\varphi$  est un isomorphisme, montrer qu'il en est de même de  $\varphi_0$ . (*Introduire la matrice  $\Phi'$  de l'isomorphisme réciproque de  $\varphi$ , puis la matrice  $f(\Phi')$ .*)
- 3 En déduire que si  $A$  est un anneau possédant un homomorphisme dans un corps  $K$ , le  $A$ -module  $A^m$  n'est isomorphe au  $A$ -module  $A^n$  que si  $m = n$ . Autrement dit, les cardinaux des bases d'un  $A$ -module libre de type fini sont égaux à un même entier (qu'on appelle le *rang* du module).

## EXERCICE 29

- 1 Soit  $K$  un anneau à division, soit  $V$  un  $K$ -espace vectoriel et soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . Montrer que  $W$  est l'intersection des noyaux des formes linéaires de  $V$  qui sont nulles sur  $W$ .
- 2 Plus généralement, quelle est l'intersection des noyaux des formes linéaires de  $V$  qui sont nulles sur une partie donnée de  $V$ ?
- 3 Donner un exemple d'anneau  $A$  et de  $A$ -module  $M$  non nul tel que toute forme linéaire sur  $M$  soit nulle.
- 4 Donner un exemple d'anneau intègre  $A$ , de  $A$ -module libre  $M$ , de sous-module  $N$ , tel que  $N$  ne soit pas l'intersection des noyaux des formes linéaires nulles sur  $N$ .

## EXERCICE 30

Soit  $K$  un anneau à division, soit  $V_1, V_2, V_3, V_4$  des  $K$ -espaces vectoriels, soit  $u: V_1 \rightarrow V_2, v: V_3 \rightarrow V_4$  et  $w: V_1 \rightarrow V_4$  des applications linéaires.

- 1 Pour qu'il existe une application linéaire  $f: V_2 \rightarrow V_4$  telle que  $f \circ u = w$ , il faut et il suffit que  $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(w)$ .
- 2 Pour qu'il existe une application linéaire  $g: V_1 \rightarrow V_3$  telle que  $v \circ g = w$ , il faut et il suffit que  $\text{im}(w) \subset \text{im}(v)$ .
- 3 Pour qu'il existe une application linéaire  $h: V_2 \rightarrow V_3$  telle que  $v \circ h \circ u = w$ , il faut et il suffit que  $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(w)$  et  $\text{im}(w) \subset \text{im}(v)$ .

## EXERCICE 31

Soit  $V$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel et soit  $u$  un endomorphisme de  $V$  tel que  $u^2 + u + \text{id} = 0$ . À l'aide de  $u$ , munir  $V$  d'une structure de  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel (et même de deux...).

## E. MATRICES À COEFFICIENTS DANS UN ANNEAU EUCLIDIEN OU PRINCIPAL

## EXERCICE 32

- 1 Montrer que la matrice de la transposition de  $\{1, 2\}$  appartient au sous-groupe de  $\text{GL}_2(\mathbf{Z})$  engendré par les matrices élémentaires et les matrices  $D_i(-1)$ .
- 2 Appartient-elle au sous-groupe engendré par les matrices élémentaires?
- 3 En déduire que le sous-groupe  $W$  de  $\text{GL}_n(\mathbf{Z})$  est contenu dans le sous-groupe engendré par les matrices élémentaires  $E_{i,j}(1)$  et les matrices  $D_i(-1)$ .

**EXERCICE 33**

Soit  $N$  un entier naturel.

- 1 Montrer que le groupe  $SL_n(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$  est engendré par les matrices élémentaires.
- 2 Montrer que l'homomorphisme canonique  $SL_n(\mathbf{Z}) \rightarrow SL_n(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$  est surjectif.
- 3 L'homomorphisme  $GL_n(\mathbf{Z}) \rightarrow GL_n(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})$  est-il surjectif?

**EXERCICE 34**

- 1 Soit  $u \in \mathbf{Z}^n$  un vecteur dont les coordonnées sont premières entre elles. Montrer par récurrence sur le plus petit coefficient non nul de  $u$  qu'il existe une matrice  $M \in SL_n(\mathbf{Z})$  de première colonne  $u$ .
- 2 Soit  $M$  une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes ( $p \leq n$ ) dont les coefficients sont dans un anneau principal  $A$ .  
Montrer qu'on peut compléter  $M$  en une matrice  $P \in GL(n, A)$  si et seulement si le pgcd des mineurs d'ordre  $p$  de  $A$  est égal à 1.

**EXERCICE 35**

Soit  $A$  un anneau commutatif.

- 1 Montrer que le groupe  $GE_n(A)$  est produit semi-direct du sous-groupe distingué  $E_n(A)$  et du sous-groupe formé des matrices  $D_1(a)$ , pour  $a \in A^\times$ .
- 2 Même question en remplaçant  $GE_n$  par  $GL_n$  et  $E_n$  par  $SL_n$ .

**EXERCICE 36**

Soit  $K$  un anneau à division.

- 1 Montrer que l'on a  $GL_n(K) = GE_n(K)$ .  
Soit  $D$  le groupe abélien  $K^\times / [K^\times, K^\times]$ , quotient de  $K^\times$  par le sous-groupe engendré par les commutateurs. Notons  $\pi: K^\times \rightarrow D$  l'application canonique.
- 2 Montrer qu'il existe un unique homomorphisme de groupes  $\delta$  de  $GE_n(K)$  dans  $D$  qui applique  $E_{ij}(a)$  sur  $\pi(1)$  pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  et  $a \in A$  et qui applique  $D_i(a)$  sur  $\pi(a)$  pour tous  $i \in \{1, \dots, n\}$  et  $a \in A^\times$ .
- 3 Lorsque  $K$  est commutatif,  $D = K^\times$ . Montrer alors que l'homomorphisme  $\delta: GL_n(K) \rightarrow K^\times$  n'est autre que le déterminant. Dans le cas général, on l'appelle le *déterminant non commutatif*.

**EXERCICE 37**

Soit  $A$  un anneau principal et soit  $K$  son corps des fractions.

- 1 Soit  $u = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ . Montrer qu'il existe une matrice  $M \in SL_n(A)$  telle que  $Mu$  soit de la forme  $(a, 0, \dots, 0)$ , où  $a \in A$  est un générateur de l'idéal  $(a_1, \dots, a_n)$ .
- 2 Montrer que le groupe  $SL_n(A)$  opère transitivement sur l'ensemble des droites de  $K^n$ .
- 3 Soit  $D_1$  et  $D_2$  les droites de  $\mathbf{Q}^2$  de vecteurs directeurs  $(1, 2)$  et  $(2, 1)$ . Montrer qu'il n'existe pas de matrice  $M \in GL_2(\mathbf{Z})$  telle que  $M(D_1)$  et  $M(D_2)$  soient les deux axes de coordonnées.
- 4 Il n'existe pas de matrice  $M \in GL_2(k[X, Y])$  qui applique la droite de vecteur directeur  $(X, Y)$  sur celle de vecteur directeur  $(1, 0)$ .

**EXERCICE 38**

Soit  $M$  une matrice à  $n$  lignes et  $p$  colonnes ( $p \leq n$ ) dont les coefficients sont dans un anneau principal  $A$ .

Montrer qu'on peut compléter  $M$  en une matrice  $P \in GL(n, A)$  si et seulement si le pgcd des mineurs d'ordre  $p$  de  $A$  est égal à 1.

**EXERCICE 39**

Soit  $A$  un anneau principal,  $K$  son corps des fractions.

- 1 Soit  $x$  un élément non nul de  $K^n$ . Montrer qu'il existe une matrice de  $GL_n(A)$  dont la colonne est proportionnelle à  $x$ .
- 2 Démontrer que toute matrice carrée d'ordre  $n$  à coefficients dans  $K$  est produit d'une matrice de  $GL_n(A)$  et d'une matrice triangulaire de  $M_n(K)$ . (Raisonnement par récurrence.)
- 3 *Application numérique* :  $A = \mathbf{Z}$  et

$$M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & -1/4 \\ 2/5 & 2 & 2/3 \\ 3/4 & 1/7 & -1 \end{pmatrix}.$$

## F. MODULES DE TYPE FINI SUR UN ANNEAU PRINCIPAL

### EXERCICE 40

Soit  $M$  un module libre de type fini sur un anneau principal  $A$ .

- 1 Soit  $m \in M$  non nul. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
  - (1)  $m$  fait partie d'une base ;
  - (2) il existe  $f \in M^*$  tel que  $f(m) = 1$  ;
  - (3) les coordonnées de  $m$  dans toute base de  $M$  sont premières entre elles ;
  - (4) les coordonnées de  $m$  dans une base de  $M$  sont premières entre elles ;
  - (5) si  $m = am'$  avec  $a \in A$ , alors  $a \in A^\times$  ;
  - (6) si  $am = a'm'$  avec  $a \in A$ ,  $a' \in A$  et  $a \neq 0$ , alors  $a$  est multiple de  $a'$ .

On dit qu'un tel vecteur est primitif.

- 2 Montrer que tout vecteur est multiple d'un vecteur primitif.
- 3 Exemple :  $A = \mathbf{Z}$ ,  $M = \mathbf{Z}^4$ ,  $m = (126, 210, 168, 504)$ .

### EXERCICE 41

Soit  $A$  un anneau principal et  $L, M$  deux  $A$ -modules de type fini. Montrer que  $\text{Hom}_A(L, M)$  est un  $A$ -module de type fini.

### EXERCICE 42

Soit  $A$  un anneau principal, soit  $M$  un  $A$ -module de type fini dont on note  $(d_1, \dots, d_n)$  les facteurs invariants, les  $d_i$  étant des éléments non inversibles de  $A$  tels que  $d_i$  divise  $d_{i+1}$  pour  $1 \leq i < n$ .

- 1 Soit  $m$  un élément de  $M$ . Pour que le sous-module  $Am$  engendré par  $m$  dans  $M$  admette un supplémentaire, il suffit que l'annulateur de  $m$  soit égal à  $(d_n)$ .
- 2 Lorsque  $A = \mathbf{Z}$  et  $M = (\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \oplus (\mathbf{Z}/p^2\mathbf{Z})$ , donner une condition nécessaire et suffisante sur un élément  $m \in M$  pour que le sous-module  $Am$  possède un supplémentaire dans  $M$ .

### EXERCICE 43

Soit  $A$  un anneau principal et  $L$  un  $A$ -module libre de rang fini. Soit  $M$  un sous- $\mathbf{Z}$ -module de  $L$ . Montrer qu'il possède un supplémentaire dans  $L$  si et seulement si  $L/M$  est sans torsion.

### EXERCICE 44

Soit  $q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$  une forme quadratique définie positive à coefficients réels.

- 1 Montrer qu'il existe un élément non nul  $e_1$  de  $\mathbf{Z}^2$  tel que  $m = q(e_1)$  soit minimal.
- 2 Montrer qu'il existe un élément  $e_2$  de  $\mathbf{Z}^2$  tel que  $(e_1, e_2)$  soit une base de  $\mathbf{Z}^2$ .
- 3 En écrivant  $q(e_2 + ne_1) \geq q(e_1)$ , montrer que  $m \leq 2\sqrt{(ac - b^2)}/3$ .

### EXERCICE 45

Les résultats de cet exercice étendent partiellement les énoncés du lemme 2.4.5 et de la proposition 2.9.1 du polycopié. S'inspirer de leurs démonstrations pour les résoudre.

- 1 Soit  $A$  un anneau tel que tout idéal à gauche de  $A$  soit de type fini. Montrer par récurrence sur  $n$  que tout sous-module de  $A_S^n$  est de type fini.
- 2 Plus généralement, montrer que tout sous-module d'un  $A$ -module (à gauche) de type fini est de type fini.

### EXERCICE 46

Soit  $A$  un anneau commutatif et soit  $I_1, \dots, I_n$  des idéaux de  $A$ , distincts de  $A$ , tels que  $I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_n$ .

On pose  $M = \bigoplus_{i=1}^n A/I_i$ .

- 1 Soit  $\mathfrak{m}$  un idéal maximal de  $A$  qui contient  $I_n$ . Munir le  $A$ -module  $M/\mathfrak{m}M$  d'une structure de  $A/\mathfrak{m}$ -espace vectoriel ; montrer qu'il est de dimension  $n$ .
- 2 Montrer que toute famille génératrice de  $M$  a au moins  $n$  éléments.
- 3 Soit  $A$  un anneau principal et  $M$  un  $A$ -module de type fini. On note  $(d_1, \dots, d_r)$  les facteurs invariants de  $M$ .

Montrer que toute famille génératrice d'éléments de  $M$  a au moins  $r$  éléments.

### EXERCICE 47

Le but de cet exercice est de donner une autre démonstration du théorème 2.9.2 du polycopié, indépendante de considérations matricielles.

Soit  $A$  un anneau principal, soit  $M$  un  $A$ -module libre de rang fini et soit  $N$  un sous-module de  $M$ .

- 1 Montrer qu'il existe une forme linéaire  $f$  sur  $M$  pour laquelle l'idéal  $I = f(N)$  de  $A$  soit maximal, c'est-à-dire qu'il n'existe pas  $g \in M^\vee$  telle que  $f(N) \subsetneq g(N)$ . Soit  $d$  un générateur de  $I$ . On note alors  $M'$  le noyau de  $f$  et on pose  $N' = N \cap M'$ .
- 2 Montrer que pour toute forme linéaire  $f'$  sur  $M'$  et tout élément  $m \in N'$ ,  $f'(m)$  est multiple de  $d$ .
- 3 Démontrer le théorème 2.9.2 par récurrence sur le rang de  $M$ . (Appliquer la méthode utilisée pour prouver la prop. 2.9.1.)

### G. APPLICATIONS : GROUPES ABÉLIENS, ENDOMORPHISMES

#### EXERCICE 48

On considère l'ensemble  $M$  des triplets  $(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$  tels que  $x + y + z$  est pair.

- 1 Montrer que  $M$  est un sous- $\mathbf{Z}$ -module libre de type fini de  $\mathbf{Z}^3$ , de rang 3.
- 2 Donner une base de  $M$  sur  $\mathbf{Z}$ .
- 3 Montrer que  $\mathbf{Z}^3/M$  est un  $\mathbf{Z}$ -module simple.

#### EXERCICE 49

Soit  $L$  l'ensemble des  $(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3$  tels que

$$x - 3y + 2z \equiv 0 \pmod{4} \quad \text{et} \quad x + y + z \equiv 0 \pmod{6}.$$

- 1 Montrer que  $L$  est un sous- $\mathbf{Z}$ -module libre de  $\mathbf{Z}^3$ . Quel est son rang? Montrer que  $\mathbf{Z}^3/L$  est isomorphe à  $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/6\mathbf{Z})$ .
- 2 Déterminer les facteurs invariants  $(d_1, d_2, d_3)$  de  $L \subset \mathbf{Z}^3$  et calculer une base  $(e_1, e_2, e_3)$  de  $\mathbf{Z}^3$  telle que  $(d_1 e_1, d_2 e_2, d_3 e_3)$  soit une base de  $L$ .

#### EXERCICE 50

- 1 Soit  $G$  un groupe abélien fini. Soit  $n$  le plus petit entier  $\geq 1$  tel que  $nG = 0$ . Montrer qu'il existe  $g \in G$  d'ordre  $n$ , c'est-à-dire tel que  $n$  est le plus petit entier  $\geq 1$  tel que  $ng = 0$ .
- 2 Soit  $K$  un corps commutatif et soit  $G$  un sous-groupe fini de  $K^*$ . Montrer que  $G$  est cyclique. En particulier, le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique.

#### EXERCICE 51

Soit  $A$  un anneau principal et  $M$  un  $A$ -module de type fini.

- 1 Justifier l'existence d'éléments  $m_i$  (pour  $1 \leq i \leq s$ ) de  $M$  d'annulateurs  $(d_i)$ , avec  $d_1 | \dots | d_s$ , tel que

$$M = \bigoplus_{i=1}^s Am_i.$$

- 2 Soit  $i \in \{1, \dots, s\}$ . Montrer qu'il existe  $u_i \in \text{End}_A(M)$  tel que

$$u_i(m_1) = \dots = u_i(m_{s-1}) = 0, \quad u_i(m_s) = m_i.$$

- 3 Soit  $u \in \text{End}_A(M)$  qui commute à tout autre élément de  $\text{End}_A(M)$ . Montrer qu'il existe  $a \in A$  tel que  $u(m) = am$  pour tout  $m$ .
- 4 Soit  $u : M \rightarrow M$  une application additive telle que pour tout  $v \in \text{End}_A(M)$ ,  $u \circ v = v \circ u$ . Montrer que  $u$  est une homothétie  $m \mapsto am$ , pour  $a \in A$ .
- 5 Soit  $K$  un corps commutatif,  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie sur  $K$  et  $u \in \text{End}_K(E)$ . Montrer que tout endomorphisme de  $E$  qui commute à tout endomorphisme commutant à  $u$  est un polynôme en  $u$ . (On pourra utiliser la structure de  $K[X]$ -module sur  $E$  définie par  $u$ .)

#### EXERCICE 52

Soit  $k$  un corps.

- 1 Déterminer, à similitude près, toutes les matrices à coefficients dans  $k$  dont le polynôme caractéristique est  $X^3(X-1)$ .
- 2 Déterminer, à similitude près, toutes les matrices de  $\text{Mat}_4(k)$  dont le polynôme minimal est  $X(X-1)$ .
- 3 Déterminer, à similitude près, toutes les matrices de  $\text{Mat}_n(k)$  de polynôme minimal  $X(X-1)$ .
- 4 Déterminer, à similitude près, tous les endomorphismes  $u$  d'un espace vectoriel de dimension finie  $V$  tels que  $(u - \text{id})^2 = 0$ .