



G1. ALGÈBRE COMMUTATIVE.

Feuille d'exercice n° 1: Anneaux, idéaux

A. CHAMBERT-LOIR, P. AUTISSIER, D. FERRAND

A. PREMIÈRES DÉFINITIONS

EXERCICE 1

- 1 Soit A un anneau. Notons A° le groupe abélien A muni de la multiplication définie par $a \bullet b = ba$. Alors, A° est un anneau, appelé *anneau opposé* à A .
- 2 Soit A l'anneau des matrices $n \times n$ à coefficients dans \mathbf{C} . Montrer que l'application qui à une matrice associe sa transposée est un isomorphisme de l'anneau A sur l'anneau opposé.

EXERCICE 2

- 1 Soit A un anneau et soit (B_i) une famille de sous-anneaux de A . Montrer que l'intersection des B_i est un sous-anneau de A .
- 2 Soit A un anneau, soit B un sous-anneau de A et I un idéal bilatère de A . Soit R l'ensemble des sommes $a + b$, pour $a \in B$ et $b \in I$. Montrer que R est un sous-anneau de A .

EXERCICE 3Soit A un anneau et soit S une partie de A .

- 1 Montrer que l'ensemble des éléments de A qui commutent à tout élément de S est un sous-anneau de A .
- 2 Déterminer ce sous-anneau lorsque A est l'anneau des endomorphismes d'un K -espace vectoriel de dimension finie et que S est formé d'un endomorphisme diagonalisable.
- 3 Traiter le cas où S est une matrice de $M_n(\mathbf{R})$ de polynôme minimal X^n .

EXERCICE 4

Soit α un nombre complexe racine d'un polynôme unitaire à coefficients entiers P de degré d , disons $P = X^d + a_{d-1}X^{d-1} + \dots + a_0$. Montrer que l'ensemble des éléments de \mathbf{C} de la forme $c_0 + c_1\alpha + \dots + c_{d-1}\alpha^{d-1}$, pour $c_0, \dots, c_{d-1} \in \mathbf{Z}$, est un sous-anneau de \mathbf{C} . Montrer que l'hypothèse que P est unitaire est nécessaire.

EXERCICE 5Soit $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ et $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$ les sous-anneaux de \mathbf{C} engendrés par \mathbf{Z} , et respectivement par $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.

- 1 Montrer que $\mathbf{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbf{Z}\}$ et que $\mathbf{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3}; a, b \in \mathbf{Z}\}$.
- 2 Montrer que les seuls automorphismes de $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ sont l'identité et l'application qui applique $a + b\sqrt{2}$ sur $a - b\sqrt{2}$.
- 3 Montrer qu'il n'existe pas d'homomorphisme d'anneaux de $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ dans $\mathbf{Z}[\sqrt{3}]$.
- 4 Quels sont les automorphismes de $\mathbf{Z}[i]$? de $\mathbf{Z}[\sqrt[3]{2}]$?

EXERCICE 6Soit K un corps commutatif et soit V un K -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que le centre de l'anneau $\text{End}_K(V)$ est formé des homothéties $x \mapsto ax$, pour $a \in K$.**EXERCICE 7**Soit V un espace vectoriel sur un corps commutatif k .

- 1 Soit (V_i) une famille de sous-espace vectoriels de V telle que $V = \bigoplus V_i$. Pour $x = \sum x_i$, avec $x_i \in V_i$, on pose $p_j(x) = x_j$. Montrer que pour tout j , p_j est un projecteur de V d'image V_j et de noyau $\bigoplus_{i \neq j} V_i$.
Montrer que $p_j \circ p_i = 0$ si $i \neq j$ et que $\text{id}_V = \sum p_i$.
- 2 Inversement, soit (p_i) une famille de projecteurs de V telle que $p_i \circ p_j = 0$ pour $i \neq j$ et $\text{id}_V = \sum p_i$. Soit V_i l'image de p_i . Montrer que V est somme directe des V_i et que p_i est le projecteur sur V_i de noyau la somme des V_j pour $j \neq i$.

EXERCICE 8. — Automorphismes de $M_n(\mathbf{C})$

Soit A l'anneau des matrices $n \times n$ à coefficients complexes et soit φ un automorphisme de A . Soit Z le centre de A ; c'est l'ensemble des matrices scalaires.

- 1 Montrer que φ induit par restriction un automorphisme de Z .
On supposera dans la suite que $\varphi|_Z = \text{id}_Z$. Notons $E_{i,j}$ les matrices élémentaires (pour $1 \leq i, j \leq n$) et posons $B_{i,j} = \varphi(E_{i,j})$.
- 2 Montrer que $B_{i,i}$ est la matrice d'un projecteur p_i de \mathbf{C}^n , que $p_i \circ p_j = 0$ si $i \neq j$ et que $\text{id}_{\mathbf{C}^n} = \sum p_i$.
- 3 En utilisant l'exercice 7, montrer qu'il existe une base (f_1, \dots, f_n) de \mathbf{C}^n telle que p_i soit le projecteur sur $\mathbf{C}f_i$ parallèlement au sous-espace vectoriel $\sum_{j \neq i} \mathbf{C}f_j$.
- 4 Montrer qu'il existe des éléments $\lambda_i \in \mathbf{C}^*$ tels que, posant $e_i = \lambda_i f_i$, on ait $B_{i,j}(e_k) = 0$ si $k \neq j$ et $B_{i,j}(e_j) = e_i$. En déduire qu'il existe une matrice $B \in \text{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $\varphi(M) = BMB^{-1}$ pour toute matrice M de $M_n(\mathbf{C})$.
- 5 Qu'en est-il si l'on ne suppose pas que φ est l'identité sur Z ?

EXERCICE 9

Soit A un anneau et soit G un groupe. Soit Z le centre de l'anneau A .

- 1 Si $g \in G$, on note δ_g la fonction de G dans A qui vaut 1 en g et 0 ailleurs. Calculer le produit $\delta_g * \delta_{g'}$ dans l'anneau de groupe $A^{(G)}$.
- 2 Montrer que le centre de l'anneau $A^{(G)}$ est formé des fonctions $f: G \rightarrow Z$ de support fini qui sont constantes sur chaque classe de conjugaison de G .

EXERCICE 10

Un opérateur différentiel sur $\mathbf{C}[X]$ est une application \mathbf{C} -linéaire de $\mathbf{C}[X]$ dans lui-même de la forme

$$P \mapsto \sum_{i=0}^n p_i(X) \frac{d^i}{dX^i} P,$$

où les p_i sont des polynômes. Montrer que l'ensemble des opérateurs différentiels, muni de l'addition et de la composition, sur $\mathbf{C}[X]$ est un anneau.

EXERCICE 11

Soit $f: A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux.

- 1 Soit R l'ensemble des couples $(a, b) \in A \times A$ tels que $f(a) = f(b)$. Montrer que R , muni de l'addition et de la multiplication terme à terme, est un anneau.
- 2 On dit que f est un *monomorphisme* si pour tout anneau C et tout couple (g, g') d'homomorphismes d'anneaux de C dans A tel que $f \circ g = f \circ g'$, on a $g = g'$.
Montrer qu'un homomorphisme est un monomorphisme si et seulement s'il est injectif.
- 3 On dit que f est un *épimorphisme* si pour tout anneau C et tout couple (g, g') d'homomorphismes d'anneaux de B dans C tel que $g \circ f = g' \circ f$, on a $g = g'$.

Montrer qu'un homomorphisme surjectif est un épimorphisme. Montrer que l'homomorphisme d'inclusion de \mathbf{Z} dans \mathbf{Q} est un épimorphisme.

B. ÉLÉMENTS INVERSIBLES, ETC.

EXERCICE 12

Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer les éléments nilpotents et les éléments inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

EXERCICE 13

- 1 Quels sont les éléments inversibles de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, pour $n \in \mathbf{Z}$? Pour quels entiers n cet anneau est-il intègre?
- 2 Soit n et m des entiers non nuls. Montrer que l'application canonique de $\mathbf{Z}/nm\mathbf{Z}$ dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ est un homomorphisme d'anneaux. Montrer qu'il induit une surjection de $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^\times$ sur $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$.
- 3 Exhiber un homomorphisme d'anneaux $f: A \rightarrow B$ qui soit surjectif mais tel que l'homomorphisme de groupes de A^\times dans B^\times déduit de f par restriction ne le soit pas.

EXERCICE 14

Soit K un corps et A un anneau non nul. Montrer que tout homomorphisme d'anneaux de K dans A est injectif.

EXERCICE 15

- 1 Soit K un corps commutatif, soit V un K -espace vectoriel et soit A l'anneau $\text{End}_K(V)$ des endomorphismes de V . Les éléments de A inversibles à gauche sont les endomorphismes injectifs, les éléments inversibles à droite sont les endomorphismes surjectifs.
- 2 Donner un exemple d'anneau (non commutatif) et d'élément qui possède une infinité d'inverses à droite.

EXERCICE 16. — Anneau produit

Soit A et B deux anneaux. On munit le groupe abélien $A \times B$ d'une loi interne en définissant pour a et $a' \in A$, b et $b' \in B$, $(a, b) \cdot (a', b') = (aa', bb')$.

- 1 Montrer que cette loi confère à $A \times B$ une structure d'anneau. Quel est l'élément neutre pour la multiplication?
- 2 Déterminer les éléments simplifiables (à droite ou à gauche), resp. inversibles (à droite ou à gauche), resp. nilpotents, de l'anneau $A \times B$.
- 3 Montrer que les éléments $e = (1, 0)$ et $f = (0, 1)$ de $A \times B$ vérifient $e^2 = e$ et $f^2 = f$. On dit que ce sont des *idempotents*.

EXERCICE 17

Soit A un anneau non nul.

- 1 Soit a un élément de A qui possède un unique inverse à droite. Montrer que a est simplifiable puis que a est inversible.
- 2 Si tout élément non nul de A est inversible à gauche, A est un anneau à division.
- 3 On suppose que A est fini. Montrer qu'un élément simplifiable à gauche est inversible à droite. Si tout élément de A est simplifiable à gauche, A est donc un anneau à division. Si A est commutatif, tout idéal premier de A est maximal.

- 4 Même question lorsqu'on suppose que A est une K -algèbre de dimension finie comme K -espace vectoriel, K étant un corps commutatif. (Cela signifie que la multiplication de A est K -bilinéaire.)
- 5 On suppose que tout élément non nul de A est simplifiable à gauche et que l'ensemble des idéaux à droite de A est fini. Montrer que A est un anneau à division. (*Montrer que tout élément non nul x est inversible à droite en introduisant les idéaux à droite $x^n A$ pour $n \geq 1$.*)

EXERCICE 18

Soit A un anneau et soit $e \in A$ un idempotent.

- 1 Montrer que $1 - e$ est un idempotent de A .
- 2 Montrer que $eAe = \{eae; a \in A\}$ est un sous-groupe abélien de A et que la multiplication de A le munit d'une structure d'anneau.
- 3 Expliciter le cas particulier où $A = M_n(k)$, k étant un corps commutatif, et e une matrice de rang r , disons avec des 1 en début de diagonale et des 0 sinon.

EXERCICE 19

Soit A un anneau.

- 1 Soit $a \in A$ un élément nilpotent. Si $n \geq 0$ est tel que $a^{n+1} = 0$, calculer $(1 + a)(1 - a + a^2 - \dots + (-1)^n a^n)$. En déduire que $1 + a$ est inversible dans A .
- 2 Soit $x \in A$ un élément inversible et $y \in A$ un élément nilpotent tel que $xy = yx$; montrer que $x + y$ est inversible.
- 3 Si x et y sont deux éléments nilpotents de A qui commutent, montrer que $x + y$ est nilpotent. (Si n et m sont deux entiers tels que $x^{n+1} = y^{m+1} = 0$, on utilisera la formule du binôme pour calculer $(x + y)^{n+m+1}$.)

EXERCICE 20

Soit A un anneau, soit a et b des éléments de A tels que $1 - ab$ soit inversible dans A .

- 1 Montrer que $1 - ba$ est inversible dans A et calculer son inverse. (Commencer par le cas où ab est nilpotent.)
- 2 Si $A = M_n(k)$, où k est un corps commutatif, montrer que ce résultat équivaut au fait que ab et ba ont même polynôme caractéristique.

EXERCICE 21

Soit A un anneau commutatif et $f = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in A[X]$.

- 1 Montrer que f est nilpotent si et seulement si tous les a_i sont nilpotents.
- 2 Montrer que f est inversible dans $A[X]$ si et seulement si a_0 est inversible dans A et a_1, \dots, a_n sont nilpotents. (Si $g = f^{-1} = b_0 + b_1X + \dots + b_mX^m$, montrer par récurrence sur k que $a_n^{k+1} b_{m-k} = 0$.)
- 3 Montrer que f est diviseur de zéro si et seulement si il existe $a \in A$, $a \neq 0$ tel que $af = 0$. (Si $fg = 0$ avec g de degré minimal, montrer que pour tout k , $a_k g = 0$.)

C. IDÉAUX**EXERCICE 22**

Soit K un corps commutatif, soit V un K -espace vectoriel et soit A l'anneau des endomorphismes de V .

- 1 Pour tout sous-espace vectoriel W de K , l'ensemble N_W des endomorphismes dont le noyau contient W est un idéal à gauche de A , l'ensemble I_W des endomorphismes dont l'image est contenue dans W est un idéal à droite de W .
- 2 Si V est de dimension finie, les idéaux à droite (*resp.* à gauche) sont tous de cette forme.
- 3 Si V est de dimension finie, les seuls idéaux bilatères de A sont (0) et A .
- 4 L'ensemble des endomorphismes de rang fini de V (c'est-à-dire dont l'image est de dimension finie) est un idéal bilatère de A . Il est distinct de A si V est de dimension infinie.

EXERCICE 23

Soit A un anneau commutatif, soit I un idéal de A et soit S une partie de A . On définit le *conducteur* de S dans I par la formule

$$J = (I : S) = \{a \in A; \text{pour tout } s \in S, as \in I\}.$$

Montrer que J est un idéal de A ; J est le plus grand idéal K de A tel que $KS \subset I$.

EXERCICE 24

Soit A un anneau commutatif et soit a, b deux éléments de A . S'ils sont associés, c'est-à-dire s'il existe un élément inversible u de A tel que $a = bu$, montrer que les idéaux $(a) = aA$ et $(b) = bA$ sont égaux. Réciproquement, si A est intègre et si $(a) = (b)$, montrer que a et b sont associés.

EXERCICE 25

Soit A un anneau et soit I un idéal à droite de A .

- 1 Montrer que l'idéal à gauche engendré par I dans A est un idéal bilatère.
- 2 Montrer que l'ensemble J des éléments $a \in A$ tels que $xa = 0$ pour tout $x \in I$ (l'annulateur à droite de I) est un idéal bilatère de A .

EXERCICE 26

Soit A un anneau commutatif et soit I, J et L des idéaux de A . Démontrer les assertions suivantes :

- 1 $I \cdot J$ est contenu dans $I \cap J$;
- 2 on a $(I \cdot J) + (I \cdot L) = I \cdot (J + L)$;
- 3 $(I \cap J) + (I \cap L)$ est contenu dans $I \cap (J + L)$;
- 4 si J est contenu dans I , on a $J + (I \cap L) = I \cap (J + L)$;
- 5 soit K un corps. Supposons que l'on ait $A = K[X, Y]$. Posons $I = (X)$, $J = (Y)$ et $L = (X + Y)$. Déterminer $(I \cap J) + (I \cap L)$ et $I \cap (J + L)$, puis les comparer.

EXERCICE 27

Soit A, B des anneaux commutatifs et soit $f: A \rightarrow B$ un homomorphisme d'anneaux. Pour tout idéal I de A , on note $f_*(I)$ l'idéal de B engendré par $f(I)$ et on l'appelle extension de I dans B . Pour tout idéal J de B , on appelle contraction de J l'idéal $f^{-1}(J)$.

Étant donné un idéal I de A et un idéal J de B , montrer les assertions suivantes :

- 1 I est contenu dans $f^{-1}(f_*(I))$ et J contient $f_*(f^{-1}(J))$;
- 2 on a $f^{-1}(J) = f^{-1}(f_*(f^{-1}(J)))$ et $f_*(I) = f_*(f^{-1}(f_*(I)))$.

Soit \mathcal{C} l'ensemble des idéaux de A qui sont des contractions d'idéaux de B et \mathcal{E} l'ensemble des idéaux de B qui sont des extensions d'idéaux de A .

- 3 on a $\mathcal{C} = \{I; I = f^{-1}(f_*(I))\}$ et $\mathcal{E} = \{J; J = f_*(f^{-1}(J))\}$;
- 4 l'application f_* définit une bijection de \mathcal{C} sur \mathcal{E} ; quel est son inverse ?

Soit I_1 et I_2 deux idéaux de A , et J_1 et J_2 deux idéaux de B . Montrer les assertions suivantes :

- 5 on a $f_*(I_1 + I_2) = f_*(I_1) + f_*(I_2)$ et $f^{-1}(J_1 + J_2)$ contient $f^{-1}(J_1) + f^{-1}(J_2)$;
- 6 $f_*(I_1 \cap I_2)$ est contenu dans $f_*(I_1) \cap f_*(I_2)$ et l'on a $f^{-1}(J_1 \cap J_2) = f^{-1}(J_1) \cap f^{-1}(J_2)$;
- 7 on a $f_*(I_1 \cdot I_2) = f_*(I_1) \cdot f_*(I_2)$ et $f^{-1}(J_1 \cdot J_2)$ contient $f^{-1}(J_1) \cdot f^{-1}(J_2)$;
- 8 $f_*(\sqrt{I})$ est contenu dans $\sqrt{f_*(I)}$ et l'on a $f^{-1}(\sqrt{J}) = \sqrt{f^{-1}(J)}$.

EXERCICE 28

Soit I et J deux idéaux d'un anneau commutatif A . On suppose que $I + J = A$. Montrer que pour tout entier n , $I^n + J^n = A$.

EXERCICE 29

Soit A un anneau.

- 1 Montrer par un contre-exemple que l'ensemble des éléments nilpotents de A ne forme pas un sous-groupe abélien. (On pourra choisir $A = M_2(\mathbb{C})$.)
- 2 Soit N l'ensemble des éléments $a \in A$ tels que ax soit nilpotent pour tout $x \in A$. Montrer que N est un idéal bilatère de A dont tout élément est nilpotent.
- 3 Soit I un idéal bilatère de A dont tout élément est nilpotent. Montrer que $I \subset N$.

D. ALGÈBRES ; POLYNÔMES

EXERCICE 30

Utiliser la propriété universelle des anneaux de polynômes pour démontrer qu'il existe un unique morphisme de k -algèbres $\varphi : k[X, Y] \rightarrow k[X][Y]$ tel que $\varphi(X) = X$ et $\varphi(Y) = Y$ et que c'est un isomorphisme.

EXERCICE 31

Soit M un monoïde, c'est-à-dire un ensemble muni d'une loi associative et possédant un élément neutre 1. Soit A un anneau. Si $m \in M$, on note e_m l'élément de A^M dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celle d'indice m qui vaut 1.

- 1 Montrer que le groupe abélien $A^{(M)}$ possède une unique structure d'anneau telle que $(ae_m)(a'e_{m'}) = (aa')e_{mm'}$ pour m et m' dans M , a et a' dans A .
- 2 Lorsque M est un groupe, on retrouve l'anneau du groupe. Lorsque M est le monoïde \mathbf{N} , pour l'addition, on retrouve l'anneau des polynômes en une indéterminée.
- 3 Lorsque M est le groupe $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, construire un isomorphisme d'anneaux de $A^{(M)}$ sur l'anneau quotient $A[T]/(T^n - 1)$.

EXERCICE 32

On dit qu'un anneau A possède une division euclidienne à droite s'il existe une application $\varphi : A \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{N}$ de sorte que pour tout couple (a, b) d'éléments de A , $b \neq 0$, il existe un couple (q, r) d'éléments de A tels que $a = qb + r$ avec $r = 0$ ou $\varphi(r) < \varphi(b)$.

Si A possède une division euclidienne à droite, tout idéal à gauche de A est de la forme Aa . (Soit I un idéal à gauche de A ; si $I \neq 0$, soit a un élément non nul de I tel que $\varphi(a)$ soit minimal. Montrer que $I = Aa$.) C'est en particulier le cas des anneaux de polynômes $K[X]$, lorsque K est un anneau à division.

EXERCICE 33

Soit A un anneau, soit P et Q des polynômes à coefficients dans A en une indéterminée X , de degrés m et n respectivement. Soit a le coefficient dominant de Q et $\mu = \max(1 + m - n, 0)$. Montrer qu'il existe un couple de polynômes (R, S) tel que $a^\mu P = QR + S$ et $\deg S < n$. Montrer que ce couple est unique si A est intègre, ou si, plus généralement, a est simplifiable.

EXERCICE 34

Soit k un corps. Notons Φ l'homomorphisme d'évaluation de $k[X_1, \dots, X_n]$ dans $\mathcal{F}(k^n, k)$

- 1 Soit A_1, \dots, A_n des parties de k . Soit $P \in k[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme en n variables tel que $\deg_{X_i}(P) < \text{card}(A_i)$ pour tout i . Si $P(a_1, \dots, a_n) = 0$ pour tout $(a_1, \dots, a_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$, montrer que $P = 0$.
- 2 Si k est un corps infini, montrer que Φ est injectif. Montrer qu'il n'est pas surjectif.
- 3 On suppose maintenant que k est un corps fini. Montrer que Φ est surjectif; donner en particulier un antécédent explicite de tout élément de $\mathcal{F}(k^n; k)$ (penser aux polynômes interpolateurs de Lagrange). Montrer que Φ n'est pas injectif; si $q = \text{card}(k)$, montrer que son noyau est engendré par les polynômes $X_i^q - X_i$, pour $1 \leq i \leq n$.

E. ANNEAUX QUOTIENTS**EXERCICE 35**

Soit A un anneau commutatif, soit a et b deux éléments de A . Montrer les assertions suivantes :

- 1 l'anneau $A[X]/(X - a)$ est isomorphe à A ;
- 2 l'anneau $A[X, Y]/(Y - b)$ est isomorphe à $A[X]$;
- 3 l'anneau $A[X, Y]/(X - a, Y - b)$ est isomorphe à A .

EXERCICE 36

Soit K un corps. On pose $A = K[X, Y]/(X^2, XY, Y^2)$.

- 1 Déterminer les éléments inversibles de A ;
- 2 déterminer tous les idéaux principaux de A ;
- 3 déterminer tous les idéaux de A .

EXERCICE 37

Soit A un anneau et soit I l'idéal bilatère engendré par les $xy - yx$ pour $x, y \in A$.

- 1 Montrer que l'anneau A/I est commutatif.
- 2 Soit J un idéal bilatère de A tel que A/J soit un anneau commutatif. Montrer que $I \subset J$.

EXERCICE 38

- 1 Soit K un corps commutatif et $P \in K[X]$ un polynôme à coefficients dans K . Montrer que l'anneau $K[X]/(P)$ est un corps si et seulement si P est irréductible dans $K[X]$.
- 2 Montrer que le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbf{Z}[X]$. L'anneau $A = \mathbf{Z}[X]/(X^2 + 1)$ est-il un corps? (Définir un isomorphisme de A sur l'anneau $\mathbf{Z}[i]$.)
- 3 Montrer que le polynôme $X^2 + 1$ est irréductible dans $\mathbf{F}_p[X]$ si et seulement si $p \equiv 3 \pmod{4}$.
- 4 Quel est le cardinal de l'anneau A/pA ? Pour quels nombres premiers p est-il un corps? Sinon, et si p est impair, construire un isomorphisme de A/pA sur $\mathbf{F}_p \times \mathbf{F}_p$. Que se passe-t-il pour $p = 2$?

EXERCICE 39

Soit A un anneau, soit I un idéal de A . On note $I[X]$ l'ensemble des polynômes $P \in A[X]$ dont tous les coefficients appartiennent à I .

- 1 Montrer que $I[X]$ est un idéal à gauche de $A[X]$.
- 2 Si I est un idéal bilatère de A , montrer que $I[X]$ est un idéal bilatère de $A[X]$ et construire un isomorphisme de l'anneau $A[X]/I[X]$ sur l'anneau $(A/I)[X]$.

EXERCICE 40

Soit A un anneau, soit I un idéal bilatère de A et soit $M_n(I)$ l'ensemble des matrices de $M_n(A)$ dont tous les coefficients appartiennent à I .

- 1 Montrer que $M_n(I)$ est un idéal bilatère de $M_n(A)$ et construire un isomorphisme d'anneaux de $M_n(A)/M_n(I)$ sur $M_n(A/I)$.
- 2 Inversement, montrer que tout idéal bilatère de $M_n(A)$ est de la forme $M_n(I)$, pour I un idéal bilatère de A .

EXERCICE 41

- 1 Soit A un anneau commutatif, soit (a_s) une famille d'éléments de A , soit I l'idéal qu'ils engendrent. Soit (b_t) une famille d'éléments de A dont les classes dans A/I engendrent un idéal \bar{J} . Montrer que l'image réciproque de \bar{J} dans A est engendré par la réunion des familles (a_s) et (b_t) .
- 2 On choisit $A = \mathbf{Z}[X]$ et $I = (p, P)$, où P est un polynôme unitaire de degré d et p un nombre premier. Déterminer tous les idéaux J de A qui contiennent I . (Décomposer le polynôme $\bar{P} \in \mathbf{F}_p[X]$, réduction de P modulo p en facteurs irréductibles.) Préciser les relations d'inclusion entre ces idéaux et calculer l'anneau quotient A/J . Lesquels sont maximaux?
- 3 *Application numérique.* — $P = X^3 - 3$, $p = 2, 3, 5, 7, 61$.