GROUPES ET ALGÈBRES DE LIE

Examen du mercredi 31 mars (3 heures)

Exercice. Soit G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

a) Si x, y sont des éléments de $\mathfrak{g}$, montrer que

$$\exp([x,y]) = \lim_{n\to\infty} \left(\exp(x/n)\exp(y/n)\exp(x/n)^{-1}\exp(y/n)^{-1}\right)^{n^2}.$$

b) Soit H un sous-groupe de G. Montrer que son adhérence $\overline{H}$ est un sous-groupe de Lie de G.

c) Soit $f\colon G\to H$ un morphisme de groupes de Lie. Montrer que $\ker(f)$ est un sous-groupe de Lie de G. Calculer son algèbre de Lie en termes du morphisme d'algèbres de Lie $\varphi\colon \mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$.

d) Soit G un groupe de Lie connexe. Montrer que son centre en est un sous-groupe de Lie. Calculer son algèbre de Lie en termes de celle de $\mathfrak{g}$.

Problème 1.

A. On note $\mathbf{U}$ le groupe des nombres complexes de module 1.

a) Montrer que les formules

$$(x_1,x_2,u)\cdot(y_1,y_2,v) = (x_1+y_1, x_2+y_2, uv\exp(2\mathrm{i}\pi y_1x_2))$$

définissent une structure de groupe de Lie sur $\mathbf{R}^2\times\mathbf{U}$, qu'on notera G. Soit aussi $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie.

b) Quel est le centre Z de G (ensemble des éléments $g\in G$ tels que $gh=hg$ pour tout $g\in G$) ?

c) Calculer le commutateur de deux éléments de G.

d) Montrer que le groupe dérivé de G (sous-groupe engendré par les commutateurs) est égal à Z. En déduire que G est un groupe nilpotent.

e) Justifier que $e_1=\frac{\partial}{\partial x_1}$, $e_2=\frac{\partial}{\partial x_2}$ et $e_3=\frac{\partial}{\partial x_3}$ forment une base de $\mathfrak{g}$.

f) Montrer que $[e_1,e_2]=-e_3$ et $[e_1,e_3]=[e_2,e_3]=0$.

B.

a) Soit V un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie et $f\colon G\to \mathrm{GL}(V)$ un homomorphisme continu de groupes de Lie, de sorte que (V,f) est une représentation de G. On note $\varphi\colon\mathfrak{g}\to\mathrm{End}(V)$ la représentation dérivée de f et $u_i=\varphi(e_i)$, pour $i\in\{1,2,3\}$.

b) Montrer que $[u_1,u_2]=-u_3$ et $[u_1,u_3]=[u_2,u_3]=0$.

c) Soit λ une valeur propre de u_3 et W l'espace propre correspondant. Montrer que W est stable par u_1 et u_2. En déduire que $\lambda=0$, puis que u_3 est un endomorphisme nilpotent.

d) Calculer $\exp(2\mathrm{i}\pi u_3)$. En déduire que $u_3=0$.

e) Montrer que Z est contenu dans le noyau de f.

f) Le groupe G est-il isomorphe à un sous-groupe du groupe linéaire ?

C.

a) Montrer que les formules

$$(x_1,x_2,x_3)\cdot(y_1,y_2,y_3) = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3+y_1x_2)$$

définissent une structure de groupe de Lie sur $\mathbf{R}^3$. On le notera $\tilde{G}$.

b) Montrer que l'application $p\colon\tilde{G}\to G$, $(x_1,x_2,x_3)\mapsto(x_1,x_2,\exp(2\mathrm{i}\pi x_3))$ est un homomorphisme de groupes de Lie.

c) Expliquer comment p identifie $\tilde{G}$ au revêtement universel de G.

d) Quelle est l'algèbre de Lie de $\tilde{G}$?

e) Calculer le sous-groupe à un paramètre dans $\tilde{G}$ dont la dérivée en zéro est l'élément (a_1, a_2, a_3) de $\mathbf{R}^3$.

f) Expliciter l'application exponentielle de $\tilde{G}$. Montrer qu'elle est bijective.

Problème 2. Soit G un groupe de Lie compact et soit $\pi\colon \tilde{G} \to G$ son revêtement universel. On note C le noyau de π.

A.

a) Construire une partie ouverte $A \subset \tilde{G}$ telle que $\pi(A) = G$ et $\overline{A}$ soit compacte.

b) On note $B = A \cdot A^{-1}$, l'ensemble des produits gh^{-1} pour g et $h \in A$. Montrer que l'adhérence de B est compacte.

c) Montrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ et des éléments $c_1, \dots, c_n \in C$ tels que $B \subset \bigcup_{i=1}^n c_i A$.

d) Soit C_1 le sous-groupe de C engendré par $c_1, \dots, c_n$. Montrer que c'est un sous-groupe distingué de $\tilde{G}$.

e) Montrer que $\tilde{G}/C_1$ est un groupe compact

f) Montrer que que C est un groupe abélien de type fini.

B. Soit $\varphi\colon C \to \mathbf{R}$ un homomorphisme de groupes.

a) Soit θ une fonction continue à support compact sur $\tilde{G}$. Montrer que la série

$$h(x) = \sum_{c \in C} \theta(xc) e^{-\varphi(c)}$$

converge et a pour somme une fonction continue sur $\tilde{G}$.

b) Montrer que l'on peut choisir θ de sorte que h soit strictement positive en tout point.

c) Montrer qu'il existe une fonction continue $\psi\colon \tilde{G} \to \mathbf{R}$ telle que $\psi(e) = 0$ et $\psi(xc) = \psi(x) + \varphi(c)$ pour tout $x \in \tilde{G}$ et tout $c \in C$.

d) Montrer qu'il existe une fonction continue $\Psi\colon G^2 \to \mathbf{R}$ telle que $\Psi(\pi(x), \pi(y)) = \psi(xy) - \psi(x) - \psi(y)$ pour tous x et $y \in \tilde{G}$.

e) Soit dg la mesure de Haar normalisée de G. Pour $x \in G$, on pose

$$f(x) = -\int_G \Psi(x, g)\, dg.$$

Montrer que f est continue sur G et que l'on a

$$f(e) = 0, \quad \Psi(x, y) = f(xy) - f(x) - f(y)$$

pour tous x, $y \in G$.

f) Montrer qu'il existe un homomorphisme continu $\Phi\colon \tilde{G} \to \mathbf{R}$ qui prolonge φ.

C. On suppose que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G vérifie la relation $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

a) Donner un exemple de groupe de Lie compact qui vérifie cette hypothèse, et un exemple de groupe de Lie compact qui ne la vérifie pas.

b) Montrer que G est égal à son groupe dérivé.

c) Montrer que le groupe dérivé de $\tilde{G}$ est dense dans $\tilde{G}$.

d) Montrer que tout homomorphisme continu de $\tilde{G}$ dans $\mathbf{R}$ est nul.

e) Montre que C est fini et que $\tilde{G}$ est un groupe de Lie compact.